- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento**

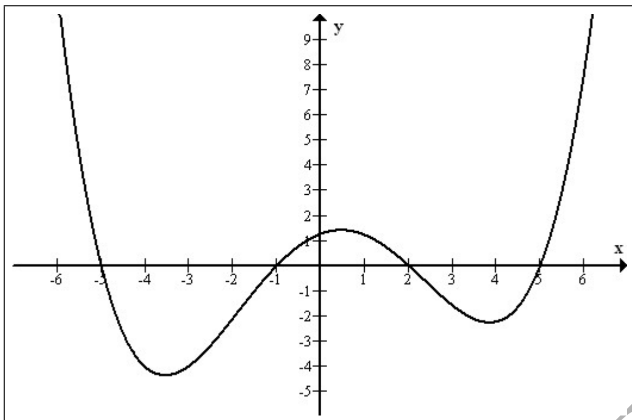
  Definición: Sea $y = f(x)$

  ✓ f es creciente, en sentido estricto ($\uparrow\uparrow$), en $I \subset Dom(f)$, si y solo si,

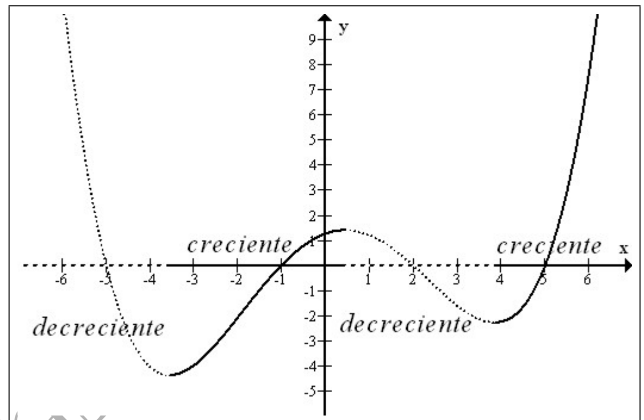
  $$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

  ✓ f es decreciente, en sentido estricto ($\downarrow\downarrow$), en $I \subset Dom(f)$, si y solo si,

  $$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



$y = f(x)$



Intervalos de crecimiento: $]-3{,}55,\ 0{,}46[$, $]3{,}84,\ +\infty]$
Intervalos de decrecimiento: $]-\infty, -3{,}55[$, $]0{,}46,\ 3{,}84[$

- El estudio del **comportamiento** de una función $f(x)$ (creciente/decreciente) se puede realizar, analizando el signo de $f'(x)$.

  Teorema. Sea $y = f(x)$ función derivable en un intervalo I (o en todo $\mathbb{R}$).

  ✓ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es **creciente** (en sentido estricto) en I

  ✓ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es **decreciente** (en sentido estricto) en I

Para determinar los intervalos de crecimiento/decrecimiento se debe resolver las inecuaciones: $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$

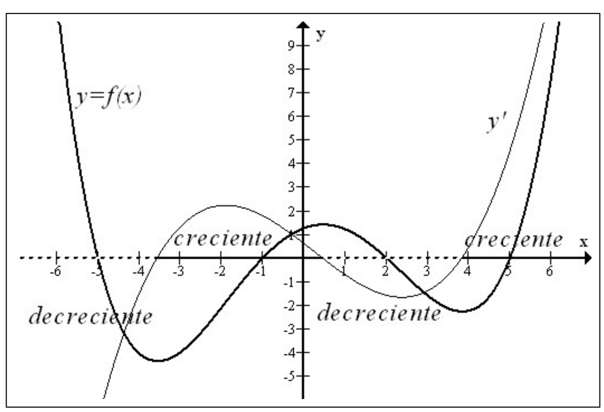


Gráfico de y e y'

- **Ejemplo**: Sea $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

P1) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$

P2) a) $f'(x) = 0 \Longrightarrow 6(x-1)(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 1 \quad o \quad x = 2$

b) No existe x tal que $f'(x)$ no está definida.

Luego, los puntos claves de $f'(x)$ son: 1, 2

P3) Signo de $f'(x)$ en cada sub-intervalo.

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
signo de $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$	$+$		$-$		$+$
Comportamiento de f	f es creciente		f es decreciente		f es creciente

Luego, f es decreciente en ....; f es creciente en ....

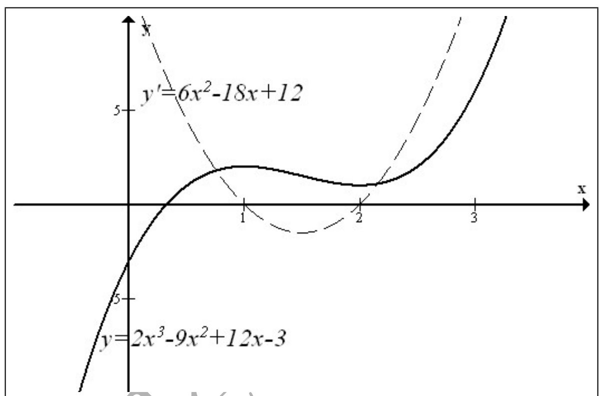


Gráfico de y e y'

- **Actividades**: Estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de a) $y = x^2 e^x$, b) $y = x \ln x$

- **Método de la 1ra. derivada para calcular extremos relativos de una función.**

Paso-1. Hallar $f'(x)$.

Paso-2. Hallar los **puntos críticos** de f. Los valores críticos, determinan subintervalos en $Dom(f)$.

Paso-3. Estudiar el comportamiento de f en torno a cada valor crítico de f.

Sea $x = c$ un valor crítico de f. Se calcula $f'(x)$ para un valor de x muy cerca por la izquierda de $x = c$, y luego $f'(x)$ para un valor de x muy cerca a la derecha de $x = c$.

- Si el valor de $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, entonces f tiene un **Máximo relativo** en $x = c$ igual a $f(c)$.
- Si el valor de $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en $x = c$ igual a $f(c)$.
- Si el signo de $f'(x)$ no cambia, entonces la función no tiene ni máximo ni mínimo relativo en $x = c$.

- **Ejemplo**. Sea $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, determinar extremos relativos de f.

Solución:

P1: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

P2: Valores críticos de f

(*) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -3$ o $x = 1$.

(*) El denominador de $f'(x)$ se hace cero cuando $x = -1$, de manera que $f'(-1)$ no existe. Se omite $x = -1$ como valor crítico, ya que en -1 la función f no está definida. Ver nota[1]

Así, los valores críticos son -3 y 1.

P3: Los valores críticos dividen el eje real en tres tramos, se analiza el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos (criterio de la primera derivada)

(-4) $x < -3$	-3	(0) $-3 < x < 1$	1	(2) $x > 1$
$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
	$\Downarrow$ Máx rel		$\Downarrow$ min rel	

P4: *Conclusión*: Como la derivada de f cambia de + a − al pasar por -3, entonces en $x = -3$ hay un máximo local, este valor máximo es $f(-3) = -5$.

También, f' cambia de − a + al pasar por $x = 1$, se concluye que en $x = 1$ hay un mínimo local, y este valor mínimo es $f(1) = 3$

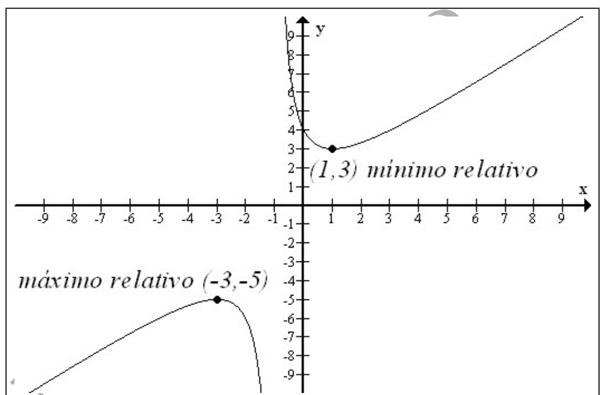


Gráfico de y y sus extremos relativos

- **Autoevaluación**: Estudiar extremos relativos de a) $y = 100 + 8x^3 + x^4$, b) $y = x^{1/3}(x+3)^{2/3}$

- **Actividades finales**

1. Para cada una de las siguientes funciones a) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ b) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$
   a) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b) Determinar sus extremos relativos.
   c) Encontrar los valores de x donde la función crece más rápidamente.
   d) Con la información precedente (a) y (b), hacer un esbozo de su gráfico.
2. Estudiar los extremos relativos para cada una de las siguientes funciones:
   a) $y = (x-4)^5(x+2)^4$ b) $y = (x+1)^{2/3}(x-5)^2$ c) $y = xe^{-x}$ en $I = [0, 2]$
   d) $y = (2x-a)^{1/3}(x-a)^{2/3}$ e) $y = x(a+x)^2(a-x)^3$ f) $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$
   g) $y = ae^{kx} + be^{-kx}$ h) $y = \frac{x}{\ln x}$ i) $y = \sin(2x) - x$
3. Determinar los valores de a y b de modo que la función $y = axe^{bx^2}$ tenga un máximo en $x = 2$ igual a 1.

[1]Nota: Para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, se considera $x = -1$.

4. Determinar los valores de a, b, c y d tales que la función definida por $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga extremos relativos en los puntos $(1, 2)$ y $(2, 3)$.
5. El siguiente es el gráfico de **la derivada** de una función $y = g(x)$.

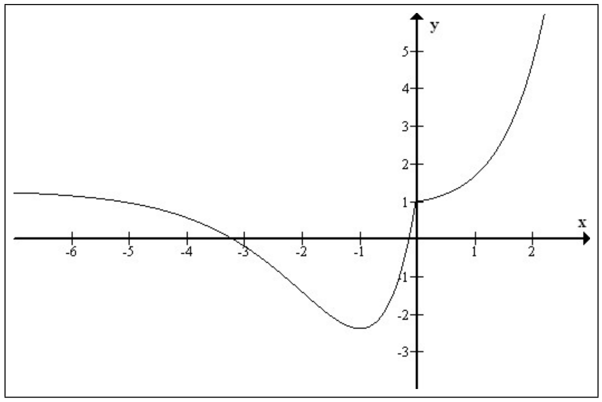


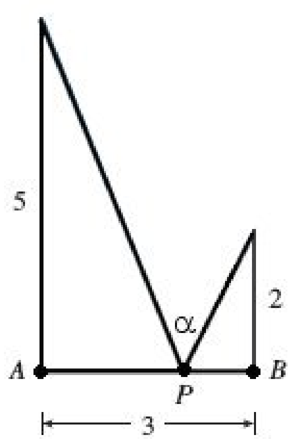
Gráfico de $y' = g'(x)$

Determinar:

a) intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y = g(x)$.
b) extremos relativos de $y = g(x)$.
c) intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y' = g'(x)$.
d) extremos relativos de $y' = g'(x)$.
e) intervalos donde es positiva o negativa $y'' = g''(x)$.

6. Algunos problemas.

a) Determinar las dimensiones de un rectángulo de área $100m^2$ cuyo perímetro sea el menor posible.
b) Encontrar el punto de la recta $y = 4x + 7$ que se encuentra más cerca del origen.
c) Con $1200cm^2$ de material se construye una caja de base cuadrada y abierta en su parte superior. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen, que se puede construir bajo estas condiciones.
d) Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicirculo de radio r.
e) ¿Dónde habría que elegir el punto P, en el segmento AB, de modo que el ángulo θ sea el máximo posible?.



f) Una isla A está ubicada a $4km$ mar adentro del punto más cercano B de una playa recta. Una mujer, en la isla, desea ir al pueblo C ubicado a $6km$ playa abajo. La mujer puede dirigirse a un punto P de la playa entre B y C, en un bote a remos a $5\frac{km}{h}$ y después caminar en forma recta de P a C a $8\frac{km}{h}$. Ubicar el punto P que permite que la mujer realice el recorrido indicado en el menor tiempo posible.