Esquema general del análisis de funciones y de la construcción de gráficos.

Para construir la gráfica de una función $y = f(x)$ es necesario:

1. Determinar el dominio de la función.
2. Hallar los puntos de discontinuidad de la función.
3. Determinar intersección del gráfico con los ejes coordenados.
   a) Intersecciones eje X: hacer $y = 0$ y resolver la ecuación resultante.
   b) Intersecciones eje Y: hacer $x = 0$ y resolver la ecuación resultante.
4. Hallar los puntos extremos así como sus valores y determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
5. Hallar los puntos de inflexión y determinar los intervalos de concavidad de la gráfica en un sentido determinado.
6. Hallar las asíntotas, en caso de existencia de las mismas.
   a) $y = a$ es una asíntota horizontal si
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, o
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$

   b) $x = b$ es una asíntota vertical si
   - $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = b$, o
   - $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = a$, o
   - $\lim\limits_{x\to b} f(x) = a$
7. Señalar otras particularidades de la gráfica, como por ejemplo, simetrías (eje X, eje Y, origen), paridad, imparidad y periodicidad.

   Nota: Recordar que impar es equivalente a ser simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 1:

Construir la gráfica de la función: $y = 3x - x^3$.
Solución.

Siguiendo el esquema para construir una gráfica, se tiene:

1. *Dominio de la función*: todos los reales, es decir, $Dom(f) = \mathbb{R}$.
2. *Puntos de discontinuidad*: no tiene, es decir, esta función es continua en todo su dominio.
3. *Intersecciones con los ejes*:
   a) *Intersecciones eje X*:
   $$\begin{array}{ll} & 3x - x^3 = 0 \\ \Longrightarrow & x(3 - x^2) = 0 \\ \Longrightarrow & x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 3 = 0 \\ \Longrightarrow & x = 0 \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = \sqrt{3} \end{array}$$
   luego la curva corta el eje x en los puntos $-\sqrt{3}, \quad 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{3}$.

b) *Intersección eje Y*: Haciendo $x = 0$ se obtiene $y = 0$. Luego, la curva corta al eje Y en $(0, 0)$.

4. *Puntos extremos e intervalos de crecimiento y decrecimiento*:

$$y = f(x) = 3x - x^3$$

derivando queda $\quad f'(x) = 3 - 3x^2$

igualando a cero da $\quad 3 - 3x^2 = 0$, de donde $x = \pm 1$ puntos críticos

signo de f':

		$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
	$f'(x) = 3 - 3x^2$	$-$	$+$	$-$
por lo tanto	f	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

En -1 la función tiene un mínimo cuyo valor es $f(-1) = -2$

En 1 la función tiene un máximo cuyo valor es $f(1) = 2$

f es creciente en el intervalo $]-1, 1[$ y es decreciente en $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$

5. *Puntos de inflexión e intervalos de concavidad*:

$f''(x) = -6x$, igualando a 0 nos de $x = 0$ (posible punto de inflexión).

Ahora como $f''(x) > 0$ *antes* del 0 y $f''(x) < 0$ *después* del 0 (o sea f'' cambia de signo) entonces el 0 es punto de inflexión.

La función f es cóncava hacia arriba en $]-\infty, 0[$

y cóncava hacia abajo (convexa) en $]0, +\infty[$.

6. *Asíntotas*: no tiene.

7. Esta fución es impar ya que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x) - (-x)^3 \\ & -3x + x^3 \\ & -(3x - x^3) \\ & -f(x) \end{aligned}$$

Luego, basado en lo anterior, el gráfico es:

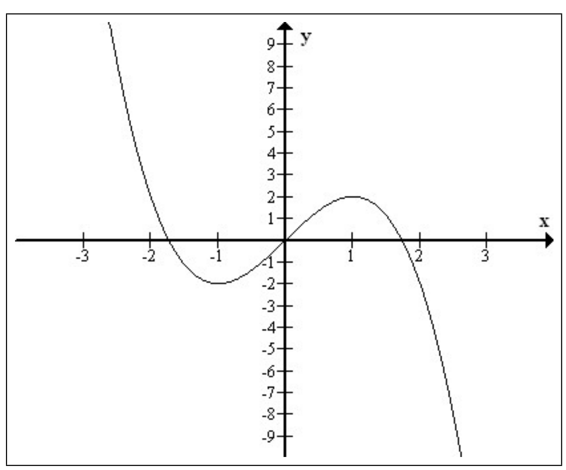


Gráfico de $y = 3x - x^3$

Ejemplo 2: Trazar la gráfica de $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

Solución:

1. *Dominio de la función*: $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

2. *Puntos de discontinuidad*: Hay 2 puntos de discontinuidad: -2 y 2.

3. *Intersecciones con los ejes*:

   Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$; cuando $y = 0$, entonces $x = 0$, luego (0,0) es la única intersección con los ejes coordenados.

4. *Puntos extremos e intervalos de crecimiento y decrecimiento*:

   $$f'(x) = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$$

   $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 4 + x^2 = 0$, pero $4 + x^2 \neq 0$ para todo x real. Luego f no tiene extremos locales.

   Analizando la derivada de f, se tiene que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego f es decreciente en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

5. *Puntos de inflexión e intervalos de concavidad*:

   Concavidad: Analizando la segunda derivada de f, se concluye que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-2, 0[$ y $]2, +\infty[$; cóncava hacia abajo en $]-\infty, -2[$ y en $]0, +\infty[$

6. *Asíntotas*:

   El denominador de $x/(x^2-4)$ es cero cuando $x = \pm 2$ y el numerador no es cero para estos valores de x, además

   $$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$$

   $$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2^-} \frac{x}{4-x^2} = -\infty$$

   Por lo tanto, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

   Se tiene además que

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \,, \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$$

   Por lo tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

7. *Simetría*: Existe sólo simetría con respecto al origen, reemplazando x por $-x$ e y por $-y$ se obtiene

   $$-y = \frac{-x}{(-x)^2-4} = \frac{-x}{x^2-4}$$

   que es la misma ecuación original.

   Por último, la gráfica de f es

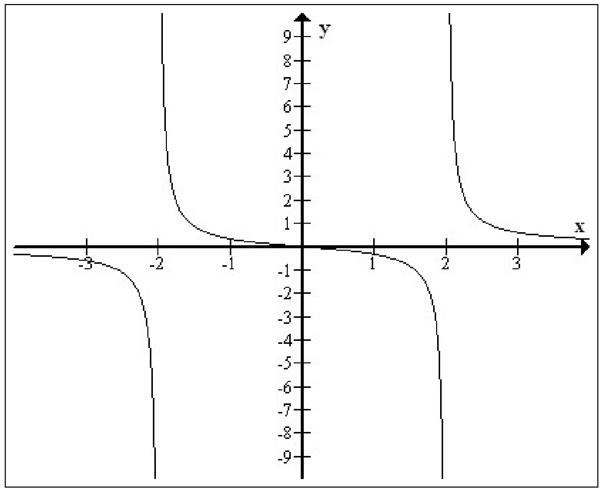
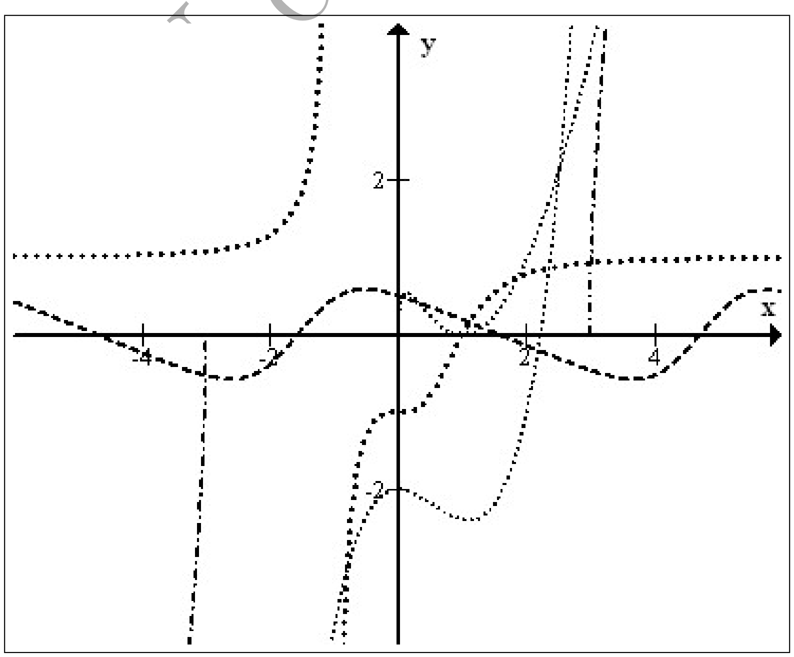


Gráfico de $y = \dfrac{x}{x^2-4}$

Actividades propuestas: Siguiendo la metodología aquí señalada, obtener los gráficos de:

1. $y = f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$
2. $y = g(x) = x\sqrt{x^2-9}$
3. $y = h(x) = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$
4. $y = k(x) = x(\ln x)^2$
5. $y = m(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$
6. $y = p(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$



De los seis gráficos precedentes, falta uno. ¿cuál es?