

Temas:

- Introducción.
- Fórmulas de derivación de funciones básicas.
- Fórmulas de derivación para algebra de funciones.

- *Introducción:* En esta sesión se inicia la deducción y puesta en práctica de fórmulas para derivar funciones. Empezaremos con las funciones básicas y luego se revisan las fórmulas para derivar la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones.

- **Fórmulas de las derivadas de las funciones básicas:**

1. *Derivada de una función constante* (Fórmula 1.a).

Sea $y = f(x) = c$ una función constante, entonces $f'(x) = (c)' = 0$

es decir,

La derivada de una función constante es igual a 0.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0
 \end{aligned}$$

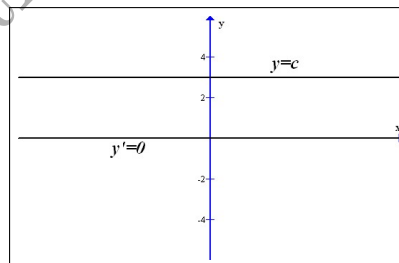


Gráfico de una función constante y su derivada.

2. *Derivada de la función identidad* (Fórmula 1.b).

Si $y = f(x) = x$ es la función identidad, entonces $f'(x) = (x)' = 1$

es decir,

La derivada de la función identidad es igual a 1.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1
 \end{aligned}$$

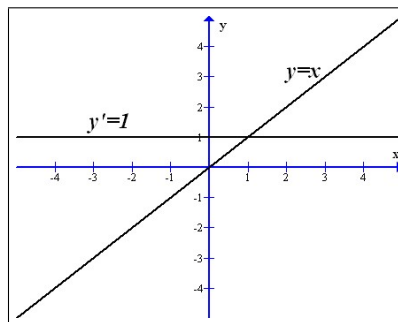


Gráfico de la función identidad y su derivada.

3. Derivada de la función potencial (Fórmula 2.a).

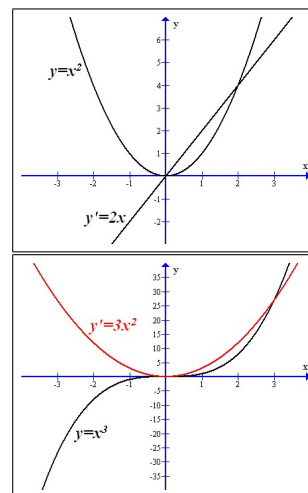
$$\text{Si } y = f(x) = x^n, \text{ entonces } f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

es decir,

La derivada de la función x^n es igual al exponente por x elevado al exponente menos 1.

En efecto, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n - \cancel{x^n}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n}{h} = 1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h + \dots + h^{n-1}) = nx^{n-1} \end{aligned}$$



4. Derivada de la función logaritmo natural (Fórmula 2.b).

$$\text{Si } y = f(x) = \ln x, \text{ entonces } f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} && \text{como } \frac{1}{x} \text{ es constante y } \ln \text{ es continua} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right] && \text{Usando cambio de variable } t = \frac{h}{x} : \\ &= \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right] && \text{como } \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \text{ limite especial :} \\ &= \frac{1}{x} \ln[e] \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

5. Derivada de la función exponencial (Fórmula 2.c). Propuesta.

$$\text{Si } y = f(x) = e^x, \text{ entonces } f'(x) = (e^x)' = e^x$$

En efecto:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

6. Derivada de la función sin.

Si $y = f(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$
--

En efecto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

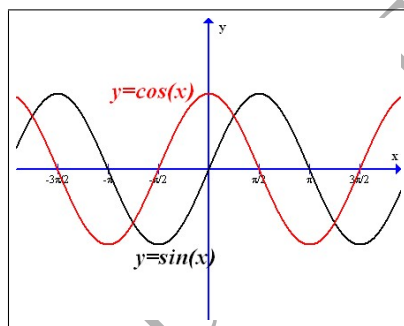


Gráfico de la función $y = \sin x$ y su derivada.

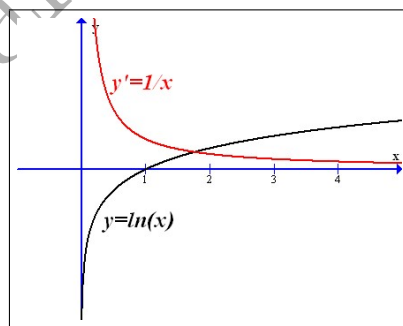


Gráfico de la función $\ln x$ y su derivada $\frac{1}{x}$.

Nota: La verificación de las derivadas de las restantes funciones trigonométricas, se dejan para su trabajo personal.

Las fórmulas recién deducidas, no permiten calcular por si solas otras derivadas. Pero éstas en conjunto con las reglas del algebra de derivadas, permiten calcular fácilmente las derivadas de muchas funciones más.

A modo de ejemplo, se deducirá la regla de la derivada de un producto de funciones:

7. Regla de la derivada de un producto.

Si $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funciones derivables, entonces

$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
--

En efecto:

$$\begin{aligned}
 (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)
 \end{aligned}$$

Nota: ¿Por qué $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$?

Ejemplos:

1) Si $f(x) = 3x^4 - \frac{1}{x^2} + 5 \cos x$ encontrar $f'(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (3x^4 - \frac{1}{x^2} + 5 \cos x)' \\
 &= (3x^4)' - (x^{-2})' + (5 \cos x)' \\
 &= 3(4x^3) - (-2)x^{-3} + 5(-\sin x) \\
 &= 12x^3 + 2x^{-3} - 5 \sin x
 \end{aligned}$$

2) Si $f(x) = 2e^x + e^2 + x^e$ encontrar $f'(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (2e^x + e^2 + x^e)' \\
 &= (2e^x)' + (e^2)' + (x^e)' \\
 &= 2(e^x)' + 0 + ex^{e-1} \\
 &= 2e^x + ex^{e-1}
 \end{aligned}$$

3) Si $f(x) = (x^2 + 1)(5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)$, usando la regla del producto, encontrar $f'(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^2 + 1)(5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)' + (5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)(x^2 + 1)' \\
 &= (x^2 + 1)((5x^3)' + (4x^2)' + (3x)' + 1') + (5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)((x^2)' + 1') \\
 &= (x^2 + 1)(5(3x^2) + 4(2x) + 3(1) + 0) + (5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)(2x + 0) \\
 &= (x^2 + 1)(15x^2 + 8x + 3) + (5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)(2x) \\
 &= (x^2 + 1)(15x^2 + 8x + 3) + (10x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 2x) \\
 &= (15x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + 3) + (10x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 2x) \\
 &= 25x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 10x + 3
 \end{aligned}$$

4) Si $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, encontrar $f'(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' \\
 &= \frac{(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)' - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

5) Si $f(u) = \sqrt{u} - \frac{3}{u^3}$, encontrar $f'(u)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 f'(u) &= \left(\sqrt{u} - \frac{3}{u^3} \right)' \\
 &= \left(u^{\frac{1}{2}} - 3u^{-3} \right)' \\
 &= (u^{\frac{1}{2}})' - (3u^{-3})' \\
 &= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot (-3)u^{-4} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}} + \frac{9}{u^4}
 \end{aligned}$$