

Introducción: ¿Cuán rápido varía una cantidad? En general, una razón de cambio con respecto al tiempo es la respuesta a esta pregunta. La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ es una razón de cambio instantánea con respecto a la variable x . Si la función representa posición o distancia entonces la razón de cambio con respecto al tiempo se interpreta como velocidad.

Si dos cantidades están relacionadas entre sí, entonces cuando una de ellas cambia con el tiempo, la otra cambiará también. Por lo tanto sus razones de cambio (con respecto al tiempo) están relacionadas entre sí. Por ello a este tipo de situaciones se les llama razones de cambio relacionadas.

Para resolver un problema de razones de cambio relacionadas, se sugiere seguir los siguientes pasos:

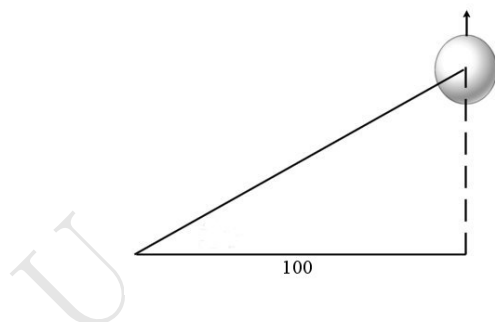
1. Hacer una ilustración de la situación planteada.
2. Identificar con símbolos las cantidades que varían en el tiempo.
3. Identificar las razones de cambio que se conocen y la razón que se busca.
4. Escribir una ecuación que relacione las variables.
5. Derivar implícitamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida en el paso 4.

Ejemplo resuelto:

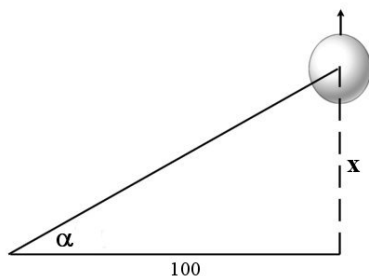
Un globo sube a una velocidad de $10 \frac{m}{s}$ desde un punto del suelo que se encuentra a 100m del observador. Encontrar la razón de cambio del ángulo de elevación del globo desde el observador cuando el globo está a 50m de altura.

Desarrollo:

1. Hacer una ilustración de la situación planteada.



2. Identificar con símbolos las cantidades que varían en el tiempo.



3. Identificar las razones de cambio que se conocen y la razón que se busca.

- Razón conocida: $\frac{dx}{dt} = 10 \frac{m}{s}$
- Razón de cambio buscada: $\frac{d\alpha}{dt}$

4. Escribir una ecuación que relacione las variables.

$$\tan \alpha = \frac{x}{100}$$

5. Derivar implícitamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida en el paso 4.

$$\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{100} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ahora bien, cuando el globo está a 50m del suelo: $\tan \alpha = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, de donde $\sec \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Luego:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{100} \cdot 10$$

de donde

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2}{25}$$

Por lo tanto, cuando el globo se encuentra a 50m del suelo, el ángulo de elevación del globo está variando a $\frac{2}{25} \frac{rad}{s}$.

Actividades

- Una infección viral se propaga en cierta población de manera tal que $N = N(t) = 140t + 12t^2$ personas contraen el virus, luego de t semanas. ¿A qué velocidad se propaga el contagio al final de 4 semanas?
- Un rectángulo crece de manera que su área aumenta a razón de $5 \text{ m}^2/\text{seg}$ y su base a razón de 3cm por segundo. ¿A qué razón esta cambiando su altura cuando su base es de 10 metros y su altura de 20 metros?
- Una escalera de 7 metros de longitud descansa contra un muro que está sobre el nivel del suelo. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 1.5 m/s, ¿a qué velocidad baja el extremo superior cuando éste está a 3.5 metros del suelo?
- Al arrojar una piedra a un estanque con aguas tranquilas se forman ondas circulares concéntricas. Cuando la onda exterior tiene un radio de 2 metros, el radio de las ondas está aumentando a una rapidez de 25 cm/s . ¿A qué rapidez crece el área del círculo formado por dicha onda?
- A un depósito cilíndrico de base circular y 3 m de radio, le ingresa agua a razón de 20 litros por segundo. Encontrar la rapidez a la que sube el nivel del agua. Nota: 1 litro = 1 dm³/seg. 1m=10dm.
- Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente se le echa agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de 1.5 metros el nivel del agua sube a razón de 2cm por minuto. ¿Con qué rapidez está entrando agua al recipiente?
- Un hombre está parado en un muelle y tira una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 3 metros por encima del amarre de la lancha. Cuando la lancha está a 4 metros del muelle el hombre está tirando la cuerda con una rapidez de 80 cm/s. ¿A qué rapidez se aproxima la lancha al muelle?
- Un farol de 4.5 m de altura tiene una luz en la parte superior y un hombre de 1.75 metros de estatura se aleja del farol caminando a una velocidad de 1.1 m/s. Cuando la distancia de la base del farol a la punta (parte más alejada) de la sombra del hombre es de 5 metros, ¿a qué velocidad crece su sombra?, ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto a la luz?