1. Sea $y = f(x)$ una función derivable. Δx denota un incremento de la variable independiente x (la que previamente designábamos por h).

   La diferencial de la función y se define y anota por:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

2. Observar que $dx = \Delta x$. dx se denomina *diferencial de* x.

3. Luego, la diferencial de y, dy, se puede anotar como

$$dy = f'(x)dx$$

Aproximaciones. Se denomina y anota *incremento de la función*, asociado al incremento de x (Δx), a

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

que corresponde al cambio real de la variable y. Luego,

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

es decir:

$$\Delta y \approx dy$$

Ejemplo resuelto:
Usando del resultado precedente, aproximar $\sqrt{402}$.
Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 200$ y $\Delta x = 2$. Luego:

$$\sqrt{402} = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = \sqrt{400} + \frac{1}{2\sqrt{400}} \cdot 2 = 20{,}05$$

Notar que el valor de $\sqrt{402}$ entregado por una calculadora es 20,04993765.
Actividades

1. Para cada caso, calcular dy y su valor para los valores entregados de x y dx:

   a) $y = x^2 + 3x, \quad x = 3, \quad dx = 0{,}5$

   b) $y = e^{3x}, \quad x = 0, \quad dx = 0{,}1$

   c) $y = \tan(4x), \quad x = \pi/16, \quad dx = -0{,}1$

2. Encuentrar un valor aproximado para

   a) $\sqrt{16{,}3}$

   b) $x^2 + \sqrt{15{,}8}$

   c) $\sin^3(\pi/3 + 0{,}1)$

3. La medida de la arista de un cubo es 15cm, con un error posible de 0.01cm. Empleando diferenciales, hallar el error aproximado al evaluar el volumen; y el área de una de las caras.

4. Un tanque cilíndrico abierto tendrá un revestimiento de 2cm de espesor. Si el radio interior tiene 6m y su altura es de 10m, calcular mediante diferenciales la cantidad aproximada de material de revestimiento que se usará.

5. Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0.04 cm. Usando diferenciales calcular en cuánto aumentó aproximadamente su área?. Comparar con el cambio exacto.

6. Al calcular la altura de un cerro se encuentra que desde un punto situado a 100m de la proyección en el suelo de la parte más alta del cerro, esta última se ve con un ángulo de elevación de 30°. Encontrar aproximadamente el mayor error que se comete al calcular la altura, sabiendo que la medición del ángulo se hace con un posible error de 0.3°.

7. La Ley de Boyle para la expansión de un gas encerrado es $PV = C$, donde P es la presión expresada como el número de libras por unidad de área, V es el volumen del gas y C es una constante. Verificar que si la ley de Boyle se cumple, entonces

$$VdP + PdV = 0$$

8. Comprobar que en las cercanías del 0, se tiene que

   a) $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$

   b) $\tan x \approx x$

   c) $\frac{1}{(1+2x)^4} \approx 1 - 8x$

   d) $e^x \approx 1 + x$