

Unidad 1: Funciones reales de una variable real

Temas: Definición Función real. Conceptos asociados: dominio, codominio, imagen, pre-imagen, recorrido. Gráfico de una función. Variable independiente. Variable dependiente. Regla del máximo dominio (RMD). Gráfico de una función.

Capacidades. C.1.: Manejar conceptos y propiedades de las funciones reales de una variable real, y analizar propiedades de una función desde los puntos de vista numérico (tabla de valores), gráfico y algebraico.

- 1.1. Conoce el concepto función y reconoce sus elementos básicos: dominio, codominio, rango, imagen y pre-imagen
- 1.2. Determina imágenes y pre-imágenes de funciones definidas tanto por una fórmula como por un gráfico.
- 1.3. Reconoce e identifica variable dependiente e independiente.
- 1.4. Determina, gráfica y algebraicamente, el rango de una función.
- 1.5. Determina el dominio de una función, usando la regla del máximo dominio.
- 1.6. Encuentra el gráfico de una función.



Wilhelm Leibniz
Alemán (1646-1716)



Leonhard Euler
Suizo (1707-1783)



Johann Dirichlet
Alemán (1805-1859)

1. Introducción

Uno de los conceptos más importantes en matemática es el de *función*. Este concepto formaliza matemáticamente la interdependencia entre dos cantidades, situación que se presenta en la modelación de una gran cantidad de importantes situaciones de carácter aplicado.

Si bien la idea que encierra este concepto surgió en la Grecia clásica no es hasta el año 1694 en que la palabra *función* aparece por primera vez en los trabajos del matemático alemán Leibniz, pero referida sólo al ámbito geométrico. Posteriormente, en el año 1718, J. Bernoulli, alumno destacado de Leibniz, entrega el primer intento de definir *función* independiente del lenguaje geométrico:

Una función de una cantidad variable es una magnitud formada de alguna manera de esta cantidad variable y constantes

Posteriormente, L. Euler, alumno brillante de J. Bernoulli, afinó el concepto de función dando la siguiente definición en su libro *Cálculo diferencial*:

Cantidades que dependen de otras de modo que cuando la segunda cambia, también cambia la primera, son llamadas funciones

Finalmente, y sólo en el siglo pasado, el matemático alemán Dirichlet entrega una definición suficientemente general de función, que es la que actualmente se usa.

*Una cantidad variable y se dice ser una función de una cantidad variable x , si **para cada valor** de la cantidad x corresponde **un único valor** de la cantidad y*

2. Definición de función

Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R} . Una función real f de A en B es una regla que hace corresponder a cada elemento x del conjunto A un único número real y en B , denotado por $f(x)$.

Esta función se denota por:

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

Nota: Un ejemplo de función es:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

3. Nociones básicas

En lo que sigue $f : A \longrightarrow B$ es una función de A en B . A y B subconjuntos de \mathbb{R} .

- Si $b = f(a)$, b se llama *imagen* de a y a se llama *pre-imagen* de b .
- A se llama *dominio* de f , lo que se denotará $dom(f)$. El conjunto B se llama *codominio* de f , que se denotará $cod(f)$.
- El subconjunto de B :

$$\{b \in B / b = f(a), \text{ para algún } a \in A\}$$

es llamado *recorrido* de f , y se denotará $rec(f)$.

- En la función $y = f(x)$, la variable x recibe el nombre de *variable independiente* y la variable y recibe el nombre de *variable dependiente*.

3.1. Ejemplo (algebraico)

Considerar la función $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$, con $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. se pide:

1. Encontrar $f(4)$, $f(-5)$
2. Calcular $f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{f(x)}$
3. Calcular $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

4. Determinar la preimagen del 3
5. Determinar el $\text{rec}(f)$

Desarrollo:

1. Teniendo como referencia la fórmula que define a f , se tiene que $f(4) = \frac{4-3}{4+5} = \frac{1}{9}$.

$f(-5)$ **no** existe, ya que en $-5 \notin \text{dom}(f)$.

$$2. f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x} - 3}{\frac{1}{x} + 5} - \frac{1}{\frac{x-3}{x+5}} = \frac{1-3x}{1+5x} - \frac{x+5}{x-3} = -\frac{8x^2 + 25x - 1}{(1+5x)(x-3)}$$

$$3. \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{(x+h)-3}{(x+h)+5} - \frac{x-3}{x+5}}{h} = \frac{\frac{8h}{(x+h+5)(x+5)}}{h} = \frac{8}{(x+h+5)(x+5)}$$

4. La preimagen de 3, en caso de existir, es algún $x \in \text{dom}(f)$ tal que $f(x) = 3$. Busquemos este x .

Si $f(x) = 3$ se tiene que $\frac{x-3}{x+5} = 3$. Resolviendo esta ecuación se obtiene que $x = -9$. Luego, la preimagen del 3 es -9 .

5. Un elemento y de B está en el $\text{rec}(f)$ si existe algún x en A tal que $f(x) = y$. Busquemos, entonces los y 's que cumplen esta condición.

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{x+5} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{3+5y}{1-y} = x$$

Por lo tanto, los y de B que tienen preimagen son todos excepto el 1, es decir $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

4. Regla del máximo dominio

En lo que sigue es usual entregar una función indicado solo su fórmula. Por ejemplo, en un ejercicio se puede señalar:

$$\dots \text{ considerar la función } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \dots$$

en este caso se deberá subentender que

- el $\text{dom}(f)$ es el máximo subconjunto de \mathbb{R} donde la *fórmula tiene sentido*, es decir, donde ella *se puede calcular*.
- el $\text{cod}(f)$, siempre será igual a \mathbb{R} .

Este criterio para determinar el dominio de f recibe el nombre de Regla del Máximo Dominio.

4.1. Ejemplo

Determinar, usando la RMD, el $\text{dom}(f)$, para $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+x+6}}$.

Desarrollo:

Es claro que $x \in \text{dom}(f)$ siempre y cuando $-x^2 + x + 6 > 0$, o equivalentemente $x^2 - x - 6 < 0$. Por lo tanto, para encontrar el $\text{dom}(f)$ se debe resolver esta inecuación.

Poner atención a los pasos seguidos para resolver esta inecuación, pues ellos le pueden servir de guía en las resoluciones de otras inecuaciones.

1. Pasar *todo* a un lado de la inecuación y factorizar.

En este caso ya está todo a un lado. Por lo tanto se procede a factorizar.

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad \implies \quad (x - 3)(x + 2) < 0$$

2. Búsqueda de puntos claves:

Los puntos claves son los números que anulan a cada uno de los factores. En este caso: $x = 3$, $x = -2$

Nota: $x = -2$ y $x = 3$ determinan en la recta real tres intervalos:

$$x < -2 \quad -2 < x < 3 \quad x > 3$$

3. Estudio de signos de $(x - 3)(x + 2)$, en cada intervalo: Tabla de signos.

En cada intervalo, se elige un número cualquiera, se reemplaza en cada factor, y se anota el signo del valor que se obtiene.

Por ejemplo, se podría elegir $x = -4$; en el segundo: $x = 0$; y en el tercero: $x = 5$.

Tabla de signos:

	(-4) $x < -2$	-2	(0) $-2 < x < 3$	3	(5) $x > 3$
$x - 3$	-	-5	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	5	+
$(x - 3)(x + 2)$	+	0	-	0	+
	NO	NO	SI	NO	NO

El conjunto solución de la inecuación es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 3\} =] - 2, 3[$$

Por lo tanto. $dom(f) =] - 2, 3[$

5. Gráfico de funciones

En todo curso de Cálculo junto el trabajo algebraico se complementa, siempre que sea posible, con el trabajo geométrico de los conceptos involucrados. Desde este punto de vista, el gráfico de las funciones adquiere una importancia vital.

Se denomina gráfico de una función $y = f(x)$ al conjunto del plano cartesiano

$$graf(f) = \{ (x, f(x)) / x \in dom(f) \}$$

A medida que transcurra el curso iremos incorporando resultados que nos ayudaran en esta tarea, por el momento podemos usar un método bastante básico, pero no por ello menos efectivo:

5.1. Pasos para graficar una función

Paso 1 Hacer una tabla de valores de pares ordenados que están en f , bajo el siguiente esquema:

x	y

Paso 2 Graficar en el plano cartesiano los puntos de la tabla precedente.

Paso 3 Se bosqueja una curva que pase por **todos** los los puntos recién graficados. En caso que los puntos graficados no permitan **sospechar** la **forma** del gráfico de la función, se deben determinar y graficar puntos adicionales.

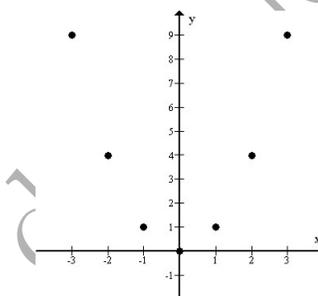
5.2. Un ejemplo

Siguiendo los pasos recién comentados, graficar la función $y = x^2$.

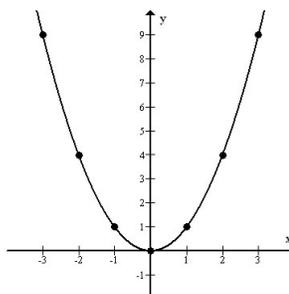
Paso 1 **Tabla de valores**

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Paso 2 **Graficar los puntos de la tabla precedente**

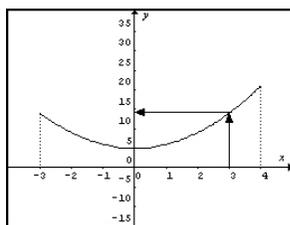
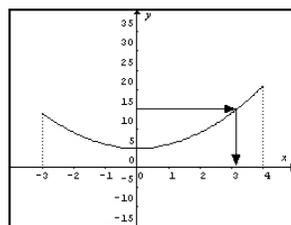
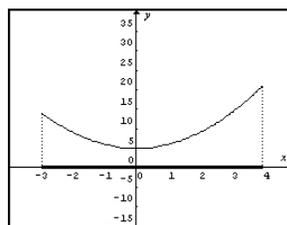
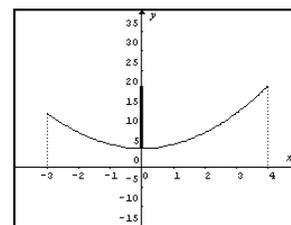


Paso 3 **Obtener el gráfico**



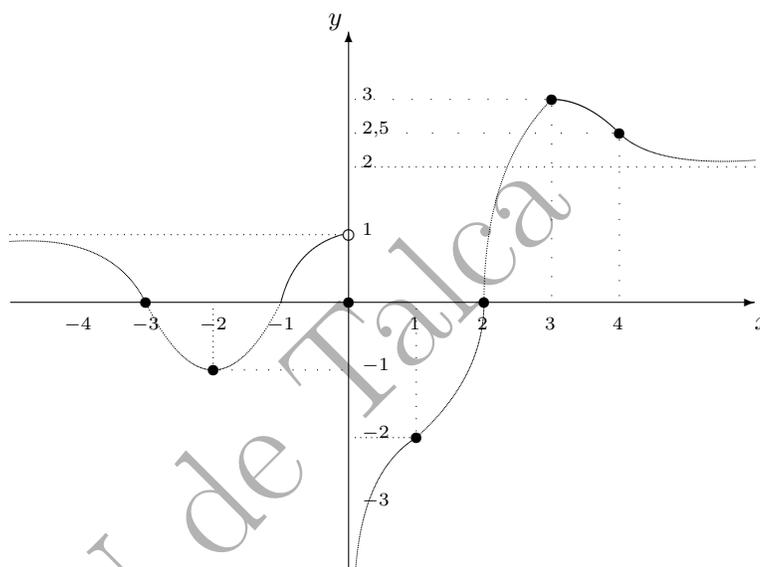
5.3. Ejemplo (gráfico)

Consideremos la función $y = f(x) = x^2 + 5$, con dominio $[-3, 4]$:

Imagen de $x = 3$ Preimagen de $y = 15$ Dominio de $y = f(x)$ Recorrido de $y = f(x)$

6. Actividades finales

1. El gráfico de una función $y = f(x)$ viene dado por:



A partir del gráfico de f , encontrar

- la imagen del 2 y la imagen del 0.
 - en caso de existir, un número que tenga una única preimagen, otro que tenga 2 preimágenes, otro que tenga 3 preimágenes y otro que tenga 4 preimágenes.
 - $dom(f)$, $cod(f)$ y $rec(f)$.
 - las soluciones de la ecuación $f(x) = 2,5$.
 - las soluciones de ecuación $f(x^2 - 1) = 0$
2. Si $f(x) = 1 - x^2$.
- Indicar $dom(f)$, $cod(f)$ y $rec(f)$.
 - Calcular, simplificando al máximo su respuesta, $f(5)$, $f(1 - x^2)$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
 - Preimágenes del -3
 - Resolver la ecuación $f(x) = f(1 - x)$.

3. Determinar, usando la RMD, los dominios¹ de las siguientes funciones

(a) $f_1(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(b) $f_2(x) = \frac{x+1}{x^4-1}$

(c) $f_3(x) = \frac{x+1}{x^4+1}$

(d) $f_4(x) = \frac{x+1}{x-2} + \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

(e) $f_5(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

(f) $f_6(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x^2}}$

4. Dada la ecuación: (E) : $30y = x(39 - 10x^2 + x^4)$ se pide:

a) Completar la siguiente tabla de valores:

x	y
-3	
-1	
0	
1	
3	

b) Graficar los puntos anteriores, y en base a ellos esbozar un posible gráfico de la ecuación (E). ¿Qué curva parece ser el gráfico de (E).

c) Completar la tabla de valores para otros valores de x , por ejemplo, -2 , -4 , 2 , y 4 .

d) Incorporar estos nuevos puntos del gráfico de (E) y con ellos esbozar *nuevamente* un gráfico para la ecuación (E).

e) ¿Qué enseñanza le deja esta actividad?

5. Hacer un esbozo de los siguientes gráficos

(a) $y = 3$

(b) $y = x^3$

(c) $y = \frac{1}{x}$

(d) $y = \sqrt{x}$

(e) $y = -x^2$

(f) $y = x^2 - x$

6. Revisar algún libro de Cálculo para indicar, al menos 3 maneras diferentes, de presentar una función. Dar ejemplos de cada caso.

7. Desafíos

■ Encontrar el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$.

■ Sea f una función real que tiene las siguientes propiedades: i) Para todos x, y reales, $f(x+y) = x + f(y)$
ii) $f(0) = 2$. Calcular el valor de $f(2010)$.

■ Si $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ y n un entero positivo, calcular

$$\begin{aligned} & f(1/1) + f(2/1) + f(3/1) + \dots + f(n/1) \\ + & f(1/2) + f(2/2) + f(3/2) + \dots + f(n/2) \\ + & f(1/3) + f(2/3) + f(3/3) + \dots + f(n/3) \\ & \vdots \\ + & f(1/n) + f(2/n) + f(3/n) + \dots + f(n/n) \end{aligned}$$

■ Sea $f(x) = \sqrt{9x^2 + 173x + 900} - \sqrt{9x^2 + 77x + 900}$ con $dom(f) =]0, +\infty[$. Sabiendo que su recorrido es un intervalo de la forma $]0, M[$, hallar M .

¹En caso de no recordar como resolver una inecuación, puede ir al sitio web del curso: Contenidos → Desigualdades.