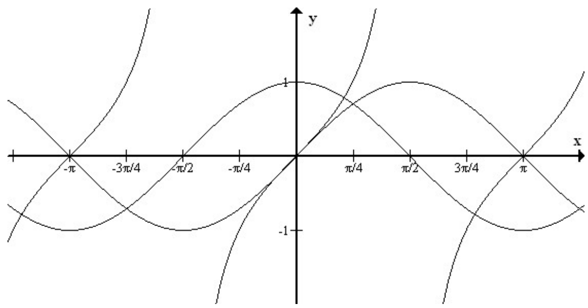


Temas: Propiedades de la función seno. Propiedades de la función coseno. Propiedades de la función tangente.

1. Introducción

En esta sesión se revisan las principales propiedades de las funciones trigonométricas, en particular de las funciones seno, coseno y tangente.

2. La función seno

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

Su dominio es $\mathbb{R}$, y su recorrido es $[-1, 1]$. Su gráfica (parcial) es

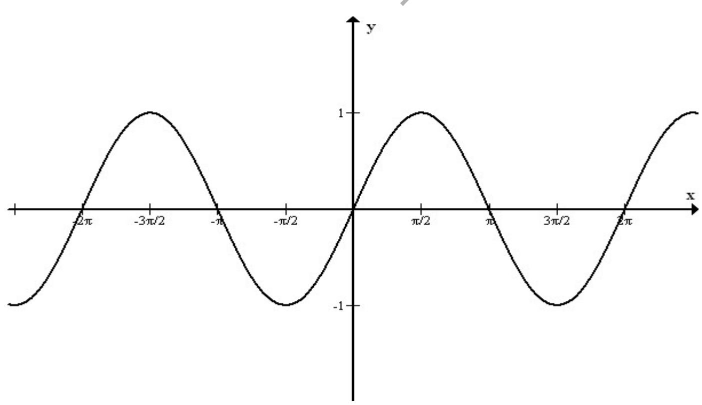


Gráfico de $\mathbf{y} = \sin \mathbf{x}$

2.1. Principales propiedades y características de la función seno

- Intersecciones con los ejes coordenados:

Eje X:	los puntos de abscisa 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc.
Eje Y:	el punto $(0, 0)$

- No es inyectiva ni sobreyectiva.
- La función seno es impar, es decir, $\sin(-x) = -\sin(x)$

- Intervalo(s) de crecimiento: Es creciente en los intervalos

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad , \quad \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[\ , \text{ etc.}$$

- Intervalo(s) de decrecimiento: Es decreciente en los intervalos

$$\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[\quad , \quad \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\ , \text{etc.}$$

- Periodicidad: Esta función es periódica, de *periodo* 2π, ya que 2π es el *menor* número real que cumple:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

  En general: $\sin(x + 2k\pi) = \sin\, x, \quad k \in \mathbb{Z}$.

3. La función coseno

$$\begin{array}{rcccl} \cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $[-1, 1]$. Su gráfica (parcial) es

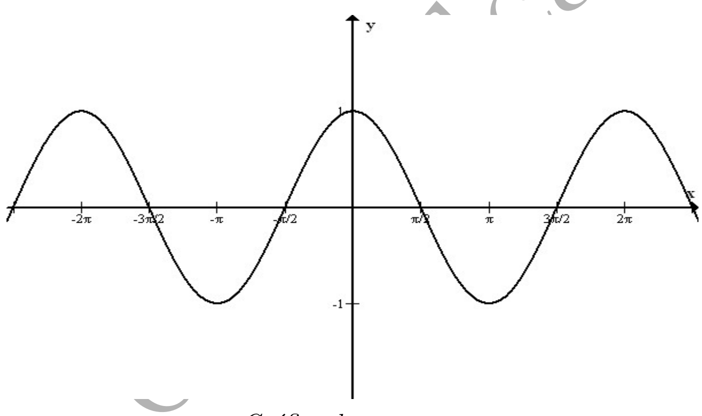


Gráfico de $\mathbf{y} = \cos \mathbf{x}$

3.1. Principales propiedades y características de la función coseno

- Intersecciones con los ejes coordenados:

$$\begin{array}{ll} \text{Eje } X\text{:} & \text{Los puntos de abscisa } 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \text{ etc.} \\ \text{Eje } Y\text{:} & \text{el punto } (0, 1) \end{array}$$

- No es inyectiva ni sobreyectiva.
- La función coseno es par, es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$
- Intervalo(s) de crecimiento: Es creciente en los intervalos $]-\pi, 0[\ , \ ]\pi, 2\pi[$, etc.
- Intervalo(s) de decrecimiento: Es decreciente en los intervalos $]-2\pi, -\pi[\ , \ ]0, \pi[$, etc.
- Periodicidad: Esta función es periódica, de *periodo* 2π, ya que 2π es el *menor* número real que cumple:

$$\cos(x + 2\pi) = \sin x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

  En general: $\cos(x + 2k\pi) = \cos\, x, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4. La función tangente

$$\begin{array}{rcccl} \tan & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}$$

Su dominio es $dom(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in\ \mathbb{Z}\}$, y su recorrido es $\mathbb{R}$. Su gráfica (parcial) es

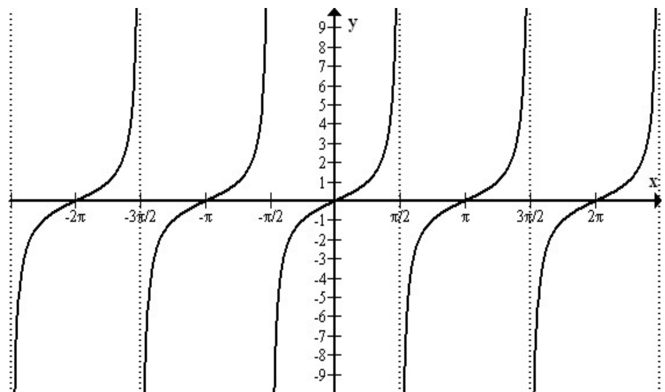


Gráfico de $y = \tan \mathbf{x}$

4.1. Principales propiedades y características de la función tangente

- Intersecciones con los ejes coordenados:

  Eje X: Los puntos de abscisa 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc.
  Eje Y: El punto $(0, 0)$.

- No es inyectiva.
- Es sobreyectiva.
- La función tangente es impar, es decir, $\tan(-x) = -\tan(x)$
- Intervalo(s) de crecimiento: Es creciente en los intervalos $\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, etc.
- Intervalo(s) de decrecimiento: En ningún intervalo es decreciente.
- Periodicidad: Esta función es periódica, de *periodo* π, ya que π es el *menor* número real que cumple:

  $$\tan(x + \pi) = \tan x \ \ para \ \ todo \ \ x \in \ D$$

  En general: $\tan(x + k\pi) = \tan x, \quad k \in \mathbb{Z}$.

5. Ejemplo

Dada la ecuación $\tan x = x$. Se pide:

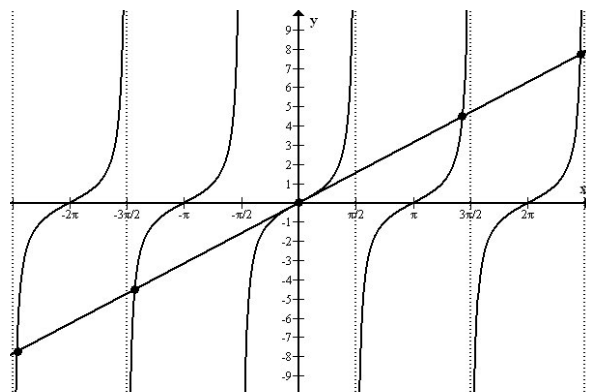
1. Comprobar que $x = 1{,}43\pi$ es, aproximadamente, una raíz.
2. Verificar que si a es una raíz, $-a$ también los es.
3. Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones $y = \tan x$ e $y = x$. De este gráfico, obtener otras raíces.

Desarrollo:

1. $\tan 1{,}43\pi \approx \tan 4{,}49 \approx 4{,}47$.

2. Si a es una raíz de la ecuación, entonces $\tan a = a$. Ahora bien, $\tan(a) = a \quad \Rightarrow \quad -\tan a = -a \quad \Rightarrow$ $\tan(-a) = -a$. Por lo tanto $-a$ también es raíz.

3. El gráfico es:



Por inspección del gráfico se obtiene que, por ejemplo, $x = 0$ y $x = 7{,}75$ son otras raíces.

6. Ejemplo: Un modelo trigonométrico

En cierta ciudad la función que representa (aproximadamente) la temperatura promedio en la semana x de un año viene dada por:

$$y = T(x) = 15\sin\left(\frac{\pi x}{24}\right) + 5$$

donde y está expresado en grados Celcius y x varía entre 1 y 48.

Nota: En esta situación se asume que todo mes tiene 4 semanas.

1. ¿En qué semana la temperatura promedio es máxima?. ¿Cuál es esta temperatura máxima?

2. Determinar, en caso que existan, las semanas en las cuales la temperatura promedio es de 12.5°C.

3. Determinar, en caso que existan, las semanas en las cuales la temperatura promedio es de 25°C.

Desarrollo:

1. La temperatura promedio es máxima cuando $\sin\left(\frac{\pi x}{24}\right)$ es máxima, esto es máximo cuando $\frac{\pi x}{24} = \frac{\pi}{2}$, de donde $x = 12$. Luego, la temperatura promedio es máxima en la semana 12, es decir, la última semana del mes de Marzo, y como

$$y = T(12) = 15\sin\left(\frac{\pi \cdot 12}{24}\right) + 5 = 20$$

el valor de esta temperatura máxima es 20°C.

2. Sea x la semana en la cual la temperatura promedio es de 10°C, luego:

$$\begin{aligned} 15\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{24}\right)+5 &= 12{,}5 \\ 15\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{24}\right) &= 7{,}5 \\ \sin\left(\frac{\pi\cdot x}{24}\right) &= \frac{1}{2} \\ \frac{\pi\cdot x}{24} &= \frac{\pi}{6} \quad // \quad \frac{5\pi}{6} \\ x &= 4 \quad // \quad 20 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la temperatura promedio es de 10°C en las semanas 4 y 20.

3. Sea x la semana en la cual la temperatura promedio es de 25°C, luego:

$$\begin{aligned} 15\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{24}\right)+5 &= 25 \\ 15\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{24}\right) &= 20 \\ \sin\left(\frac{\pi\cdot x}{24}\right) &= \frac{4}{3} > 1 \end{aligned}$$

   Como el rango de la función sin es el intervalo $[-1,1]$, esta ecuación no tiene solución, y por lo tanto *no existe una semana en la cual la temperatura promedio sea de 25° C*.

7. Actividades

1. Hacer un estudio, similar al realizado con las funciones seno, coseno y tangente, con la función $y = \csc x$.
2. Graficar, en un mismo sistema de coordenadas las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$. A partir de estos gráficos, hacer un esbozo de los gráficos de
   a) $y = -2\cos x$
   b) $y = \sin|x|$
   c) $y = |\sin x|$
   d) $y = \sin x + \cos x$
   e) $y = \sin x \cdot \cos x$
   f) $y = \frac{\sin x}{\cos x}$

8. Desafío

Un paciente está convencido que su bienestar emocional varía periódicamente con el tiempo t, de modo que se repite cada 25 días. Es decir, suponiendo que su estado emocional era neutral en el momento de su nacimiento, su nivel emocional t días después será:

$$E = E(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{25}\right)$$

donde A es el nivel emocional máximo.

1. Usar una calculadora para obtener un gráfico de la función dada y determinar cuál será su nivel emocional en su vigésimo cumpleaños si no se consideran los años bisiestos. Suponer $A = 10$.

2. Este paciente también cree que su bienestar físico sigue un modelo similar, pero con un ciclo que se repite cada 20 días. Si B es el nivel máximo de su bienestar físico, suponer $B = 10$, encontrar una función para establecer su estado físico en el momento t, obtener una gráfica de dicha función con la calculadora y determinar el nivel en su vigésimo cumpleaños.

3. ¿Cuántos días después del vigésimo cumpleaños de este paciente, coincidirán los niveles máximos de sus ciclos físico y emocional?.