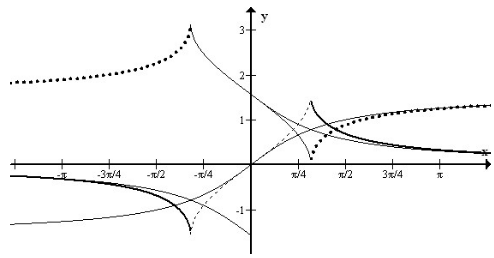


Temas: Inversa de la función seno. Inversas de las funciones coseno y tangente. Propiedades. FT inversas y calculadoras.

1. Introducción

Como ya se ha comentado, ninguna de las 6 funciones trigonométricas es inyectiva, pues todas son periódicas. Luego ninguna FT tiene función inversa. Sin embargo, por razones prácticas, se hace necesario *construir una función inversa especial* para cada FT. Este es el objetivo de esta sesión.

2. Inversa de la función seno

Como se sabe para que una función tenga inversa, ella debe se biyectiva, es decir, inyectiva y sobreyectiva. La función

$$\begin{aligned} \sin\, :\, \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sin(x) \end{aligned}$$

cuyo gráfico es

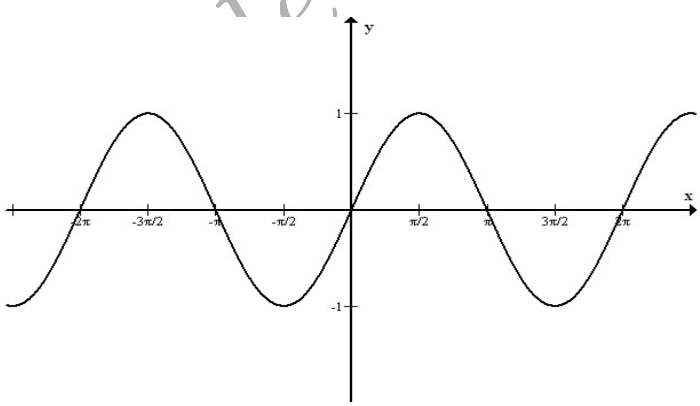


Gráfico de $\mathbf{y} = \sin \mathbf{x}$

claramente no es inyectiva ni sobreyectiva. Por lo tanto, ella no tiene inversa.

Con el fin de obtener una inversa de la función sin, se modificaran su codominio (para que sea sobreyectiva) y su dominio (para que sea inyectiva). El nuevo codominio, es claro que debe ser el intervalo $[-1, 1]$. Para un nuevo dominio se tienen muchas posibilidades de elección. La que típicamente se elige es el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto, definimos la siguiente función, que se llamará Seno (con S mayúscula) para diferenciarla de la función seno ya estudiada, que se anota simplemente Sin.

$$\begin{aligned} \text{Sin}\, :\, [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto y = \text{Sin}(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

cuyo gráfico es

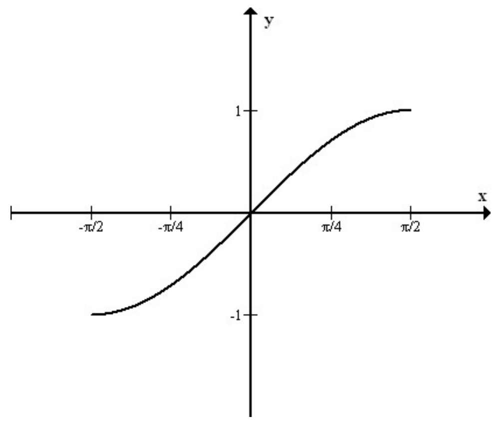


Gráfico de $\mathbf{y} = Sin\,\mathbf{x}$

Esta función es biyectiva[1], luego ella tiene inversa, que se denomina arcoseno y se abrevia arcsin (también asin y $\sin^{-1}$). Así entonces,

$$\begin{aligned} \arcsin\,:\,[-1,1] &\longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \\ x &\longmapsto y = \arcsin(x) \end{aligned}$$

cuyo gráfico es

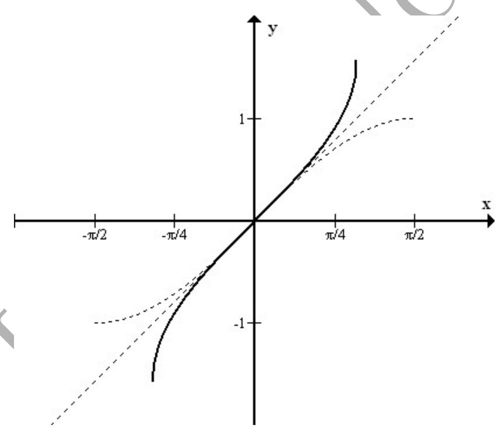


Gráfico de $\mathbf{y} = \arcsin\,\mathbf{x}$

Luego,

$$\boxed{y = \arcsin x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin y = x}$$

Nota: Revisar en su calculadora, la tecla correspondiente a la función estudiada.

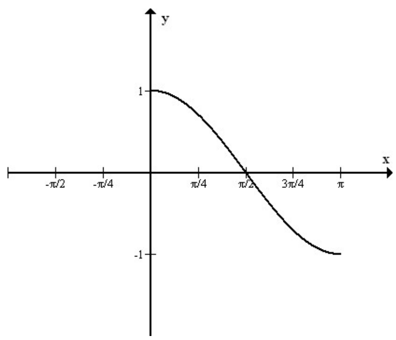
3. Inversas de las funciones coseno y tangente

Procediendo de manera completamente análoga, se definen la inversas de las funciones coseno y tangente, denominadas arcocoseno y arcotangente; y anotadas por arccos y arctan, respectivamente. En primer lugar se ajustan los dominios y codominios, de la siguiente manera

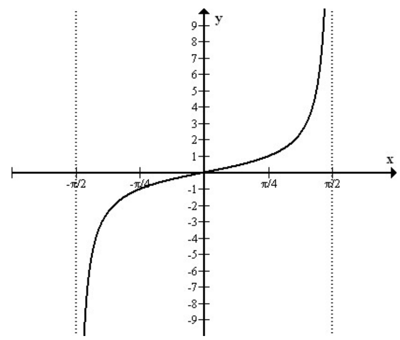
[1] Esto no debe sorprender a nadie, pues ella ha sido construida para que satisfaga esta propiedad.

$$\begin{array}{lll} \text{Cos } : [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1]. \\ \text{Tan } : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \end{array}$$

Los gráficos de estas funciones *ajustadas* son:



Gráfica de $y = Cos\, x$



Gráfica de $y = Tan\, x$

En efecto,

3.1. Inversa de la función coseno

Luego de lo comentado, la inversa de la función Coseno, se define por

$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longrightarrow & y = \arccos x \end{array}$$

donde

$$\boxed{y = \arccos x \iff \cos y = x}$$

cuyo gráfico es

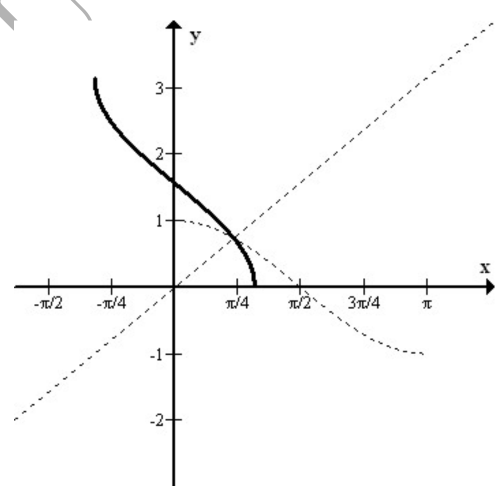


Gráfico de $\mathbf{y} = \arccos \mathbf{x}$

Nota: La función arc cos también se suele designar por acos y $\cos^{-1}$.

3.2. Inversa de la función tangente

Análogamente,

$$\begin{array}{rccc} \arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longrightarrow & y = \arctan x \end{array}$$

donde

$$\boxed{y = \arctan x \iff \tan y = x}$$

cuyo gráfico es

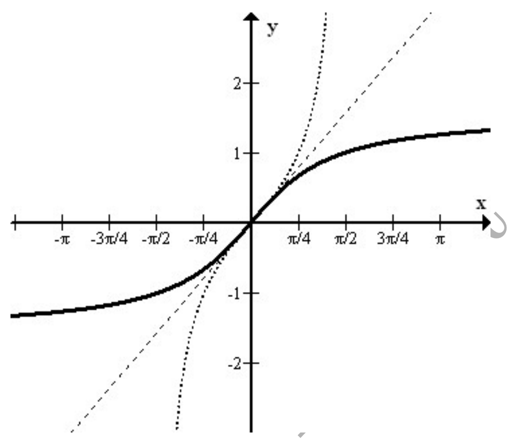


Gráfico de $\mathbf{y} = \arctan \mathbf{x}$

Nota: La función arctan también se suele designar por atan y $\tan^{-1}$.

3.3. Ejemplo

1. Como $\sin(\pi/6) = 1/2$, se tiene que $\arcsin(1/2) = \pi/6$
2. Como $\cos(\pi/2) = 0$, se tiene que $\arcsin 0 = \pi/2$
3. Como $\tan(\pi/4) = 1$, se tiene que $\arctan 1 = \pi/4$

Nota: De manera similar al camino mostrado en esta sesión, de definen las restantes FT inversas.

3.4. Ejemplo: Una ecuación

Encontrar todos los valores de x tales que:

$$\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$$

Desarrollo: Sean $\arcsin x = \alpha$, es decir, $\sin \alpha = x$
$\arcsin 2x = \beta$, es decir, $\sin \beta = 2x$
De este modo la ecuación propuesta puede escribirse:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$

Aplicando la función cos se tiene:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\tfrac{\pi}{3}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2} \tag{1}$$

ahora se debe encontrar $\cos\alpha$ y $\cos\beta$, en términos de x.
De la identidad $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se tiene $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$. Análogamente $\cos\beta = \sqrt{1-4x^2}$. Sustituyendo en (1) se tiene:

$$\begin{array}{rcll}
\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2} - x\cdot 2x & = & \frac{1}{2} & \\
2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2} - 4x^2 & = & 1 & \\
2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2} & = & 1+4x^2 & /()^2 \\
4(1-x^2)(1-4x^2) & = & (1+4x^2)^2 & \\
4-20x^2+16x^4 & = & 1+8x^2+16x^4 & \\
28x^2 & = & 3 & \\
x^2 & = & \frac{3}{28} & \\
x & = & \pm\sqrt{\frac{3}{28}} \approx \pm 0{,}327. &
\end{array}$$

De estas 2 soluciones posibles, al verificar en la ecuación propuesta, se obtiene que $x = 0{,}327$ es la única solución.

4. Propiedades

- $\sin(\arcsin(x)) = x$, para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
- $\arcsin(\sin(x)) = x$, para $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.
- $\cos(\arccos(x)) = x$, para $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
- $\arccos(\cos(x)) = x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
- $\tan(\arctan(x)) = x$, para x en $\mathbb{R}$
- $\arctan(\tan(x)) = x$, para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

5. FT inversas y calculadoras

Chequear que al usar una calculadora científica, ella entrega un ángulo

1. para **arcsen**:
   a) en el primer cuadrante, si $\sin\alpha > 0$.
   b) en el cuarto cuadrante, si $\sin\alpha < 0$.
2. para **arccos**:
   a) en el primer cuadrante, si $\cos\alpha > 0$.
   b) en el segundo cuadrante, si $\cos\alpha < 0$.
3. para **arctan**:
   a) en el primer cuadrante, si $\tan\alpha > 0$.
   b) en el cuarto cuadrante, si $\tan\alpha < 0$.

En el caso que el ángulo buscado no sea el que entrega la calculadora, se pueden usar las fórmulas de reducción. Veamos el siguiente

5.1. Ejemplo

Calcular todos los valores de α entre $0°$ y $360°$, sabiendo que $\sin\alpha = 0{,}8191520442$ y que α está en el segundo cuadrante.

Desarrollo: Usando la calculadora, se obtiene que

$$\alpha = \arcsin(0{,}8191520442) \approx 55°$$

ángulo que está, como ya se había comentado, en el primer cuadrante.

Ahora bien, por las fórmulas de reducción

$$\sin(180° - 55°) = \sin(55°)$$

Por lo tanto, el *otro* ángulo buscado es $180° - 55° = 125°$.

6. Actividades

1. Para una persona en reposo la velocidad v, en litros por segundo, del aire que fluye en un ciclo respiratorio es
$$v = 0{,}85 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$
donde t se mide en segundos.
   a) Graficar la función e indicar la porción del gráfico que corresponde a la situación planteada.
   b) ¿Cuál es la velocidad para el tiempo cero?.
   c) ¿Para qué valor de t la velocidad es de $0,425\, l/seg$?.
   d) ¿En qué instante la velocidad es máxima?.
   e) ¿Cuál es el valor de esa velocidad máxima?.
   f) ¿Cuál es la duración del ciclo respiratorio?.
2. Determinar todos los valores de $\alpha \in [0, 2\pi[$ para los cuales
   a) $\sin\alpha = -0{,}891$
   b) $\cos\alpha = -0{,}891$
   c) $\tan\alpha = 123456$
   d) $\sin(2\alpha) = 0{,}891$
3. Resolver las siguientes ecuaciones.
   (a) $\text{arc}\cos 2x - \text{arc}\cos x = \frac{\pi}{3}$. (b) $\arcsin x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
   (c) $\arcsin 2x = \frac{\pi}{4} - \arcsin x$. (d) $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{4}$.
4. Determinar el ángulo agudo que forman las recta $y = 5x - 1$ y $3x - 2y = 5$.

7. Desafío

Explicar cómo calcular **arcsec**(5), usando una calculadora científica básica.