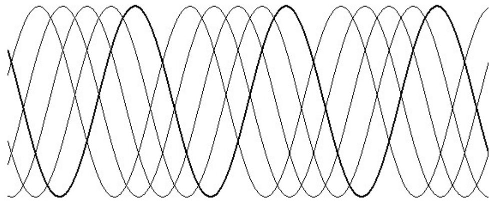


1. Introducción

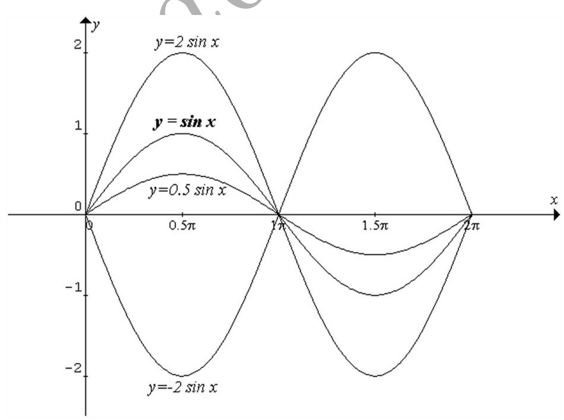
Se denominan funciones asociadas a $y = \sin x$ e $y = \cos x$, a las funciones:

$$y = A\sin(Bx + C) \qquad e \qquad y = A\cos(Bx + C)$$

La idea de esta sesión es obtener, a partir de los gráficos conocidos de las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$, los gráficos de sus funciones asociadas.

2. Gráficos de $\mathbf{y = A\sin x}$

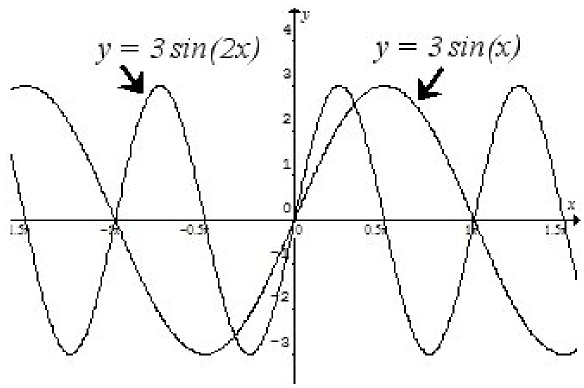
Los gráficos de estas funciones se obtienen simplemente por un *estiramiento* vertical (cuando $|A| > 1$) o una contracción vertical (cuando $|A| < 1$) de las gráficas básicas. Cuando $A < 0$, se debe hacer una reflexión en torno al eje de las X.
En este caso, el periodo de las funciones relacionadas se mantiene (2π) y su recorrido es *amplificado* por $|A|$. Este factor representa la máxima desviación de la gráfica respecto al eje X y recibe el nombre de *amplitud*.



3. Gráficos de $\mathbf{y = A\sin Bx}$

3.1. Caso $\mathbf{B > 0}$

La amplitud de esta funciones relacionadas es $|A|$ y su periodo es $\dfrac{2\pi}{B}$.
Cuando $0 < B < 1$, la curva básica se estira horizontalmente y cuando $B > 1$ se contrae horizontalmente.



Relación entre los gráficos de $y = 3\sin(x)$ *e* $y = 3\sin(2x)$

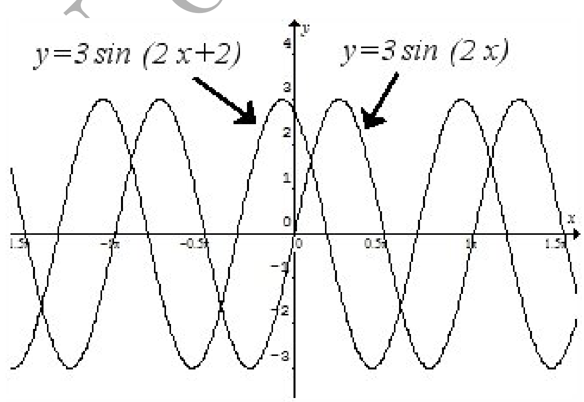
3.2. Caso B < 0

En este caso, para obtener el gráfico de $y = A\sin(Bx)$ se grafica $y = -A\sin(-Bx)$. ¿Por qué?.

4. Gráficos de $\mathbf{y} = \mathbf{A}\sin(\mathbf{Bx} + \mathbf{C})$

La amplitud de estas funciones relacionadas es $|A|$ y su periodo es $\dfrac{2\pi}{|B|}$.
Estas curvas tienen una traslación horizontal, con respecto al tipo (3) (llamada *cambio de fase*) igual a:

- $\left|\dfrac{C}{B}\right|$ unidades hacia la derecha cuando $\dfrac{C}{B} < 0$.
- $\dfrac{C}{B}$ unidades hacia la izquierda cuando $\dfrac{C}{B} > 0$.



Relación entre los gráficos de $y = 3\sin(2x)$ *e* $y = 3\sin(2x + 2)$

Nota: En general, para obtener el gráfico de $y = A\sin(Bx + C)$, a partir del gráfico de $y = \sin x$, se procede de la siguiente manera:

- Del gráfico de $y = \sin x$ se obtiene, por *cambio de amplitud*, el gráfico de

$$y = A\sin x$$

- Del gráfico de $y = A\sin x$ se obtiene, por *cambio de período*, el gráfico de
$$y = A\sin(Bx)$$
- Del gráfico de $y = A\sin(Bx)$ se obtiene, por *cambio de fase*, el gráfico de
$$y = A\sin(Bx + C) = A\sin(B(x + C/A))$$

Nota: Del mismo modo se procede para obtener el gráfico de $y = A\cos(Bx+C)$, a partir del gráfico de $y = \cos x$.

4.1. Ejemplo

Establecer la amplitud, periodo, cambio de fase y obtener un esbozo de su gráfico, para cada una de las siguientes funciones asociadas a las funciones **sen** y **cos**:

1. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$
2. $y = -\frac{3}{4}\sin(2x + 4\pi)$

Desarrollo:

1. Amplitud$= |A| = \frac{1}{2}$,
Periodo$= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1/2} = 4$,
No tiene cambio de fase.
2. Amplitud $= |A| = |-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$,
Periodo $= \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi$,
Cambio de fase $= \frac{C}{B} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

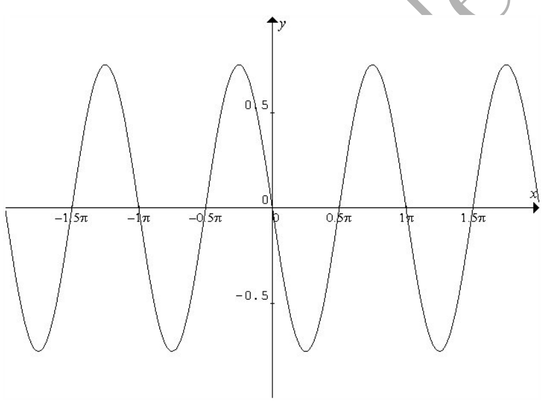


Gráfico de $y = -\frac{3}{4}\sin(2x + 4\pi)$

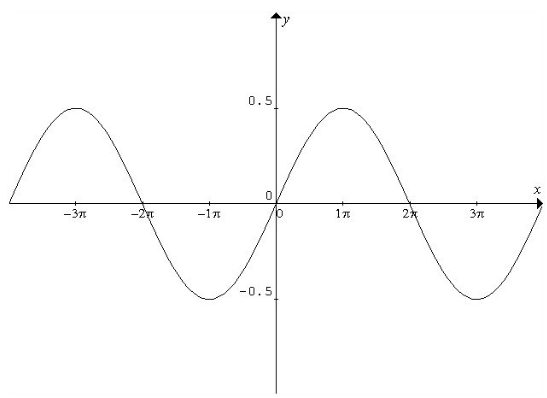
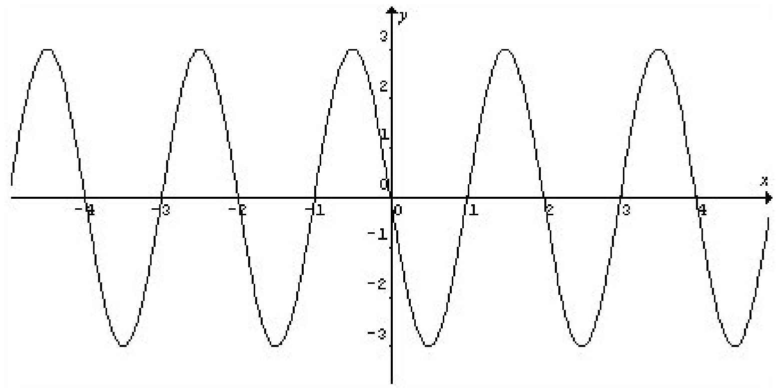


Gráfico de $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

4.2. Ejemplo

El siguiente gráfico corresponde a una función del tipo $y = f(x) = a\sin(bx + c)$:



1. Por inspección del gráfico determinar su *amplitud*, *período* y *desplazamiento de fase*. Fundamentar detalladamente los valores encontrados.

2. En base a los valores encontrados, proponer una fórmula para $y = f(x)$.

Desarrollo:

1.
   - Amplitud: Claramente la amplitud es 3.
   - Período: Como el gráfico entre 0 y 2 *se repite*, el período de esta función es 2.
   - Cambio de fase: Observando el gráfico se deduce que el cambio de fase es 1 (a la derecha o la izquierda).
2.
   - Como la amplitud es 3, se tiene que $a = 3$.
   - Como *período*$= \dfrac{2\pi}{b} = 2$, se tiene que $b = \pi$
   - Como *cambio de fase*$= \dfrac{c}{b} = \dfrac{c}{\pi} = 1$. se tiene que $c = \pi$

   Por lo tanto la función graficada es: $y = f(x) = 3\sin(\pi x + \pi)$

4.3. Ejemplo

La marea en una playa subió a media noche. El nivel del agua durante la marea alta fue de 9.9 pies, más tarde, en la marea baja, fue de 0,1 pies. Suponiendo que la siguiente marea alta fuera exactamente 12 horas después y que la altura del agua está dada por una curva de seno o coseno. Hallar una función del tipo

$$y = g(x) = A\cos(Bt) + C$$

para modelar el nivel del agua como función del tiempo.

Desarrollo:

En el modelo propuesto, A es la amplitud, $\frac{2\pi}{B}$ es el periodo y C indica el corrimiento vertical.
Primero se determina la amplitud y el periodo y luego se hará un esquema del enunciado para poder determinar la función que se pide.

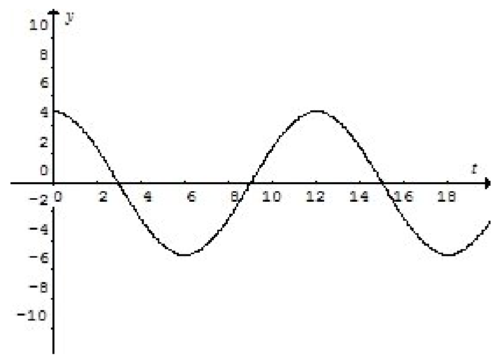
- Amplitud$= A = \dfrac{\text{Valor maximo} - \text{Valor minimo}}{2} = \dfrac{9{,}9 - 0{,}1}{2} = 4{,}9$

- $Periodo = \dfrac{2\pi}{B} \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

Luego, sin considerar aún el término C, la función (parcial) es:

$$y = 4{,}9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

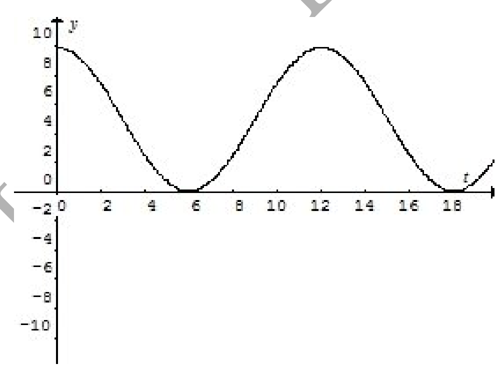
cuyo gráfico es:



Como el punto más bajo de esta curva es $-4{,}9$ y la curva buscada debe tener un mínimo de 0,1, se tiene que el término C debe ser igual a 5. Por lo tanto, la función que modela el nivel del agua en función del tiempo es:

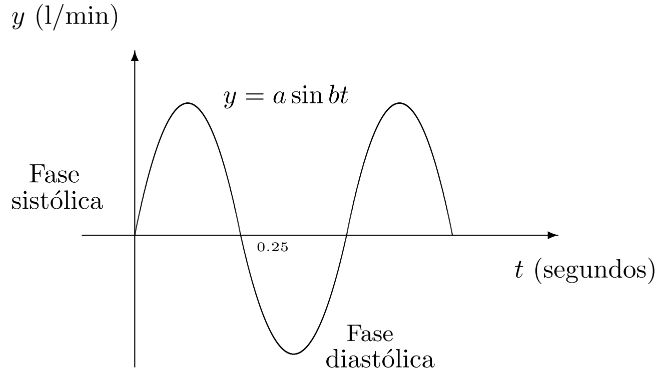
$$y = g(t) = 4{,}9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5$$

y su gráfico es:



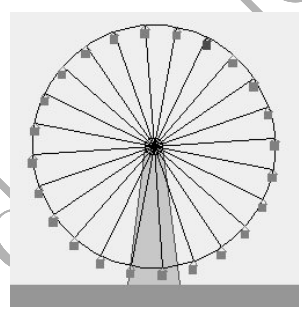
5. Actividades

1. El bombeo cardíaco consta de una fase sistólica, en la cual la sangre sale del ventrículo izquierdo hacia la aorta, y de una fase diastólica, durante la que el corazón se relaja. En ocasiones, la función cuya gráfica se muestra a continuación sirve para hacer un modelo de un ciclo completo de este proceso. Para un individuo en particular, la fase sistólica dura $\frac{1}{4}$ de segundo y tiene un volumen máximo de 8 litros por minuto (l/min). Hallar a y b.



2. En cierto día de primavera con 12 horas de luz diurna, la intensidad luminosa I toma su máximo valor de 510 calorías/cm^2 al mediodía. Si $t = 0$ corresponde a la salida del sol, hallar un modelo del tipo $I = a \sin bt$ que se ajuste a esta información.

3. Una *Rueda de la Fortuna* de una feria de atracciones tiene un radio de 12 metros y tarda 80 segundos en dar una vuelta completa. Una persona se sube a un cestillo de la Rueda de la Fortuna, el cual tiene su base a 40cm del suelo. Determinar la función que corresponde a la altura de la base del cestillo donde se encuentra dicha persona (en metros), durante los 160 primeros segundos, sabiendo que esta función es relacionada con la función $y = \sin t$, es decir, una función del tipo $y = A\sin(Bt + C) + D$.



6. Desafío

Buscar un fenómeno que presente un comportamiento periódico, y que sea posible modelarlo por medio de una función asociada a $y = \sin x$.