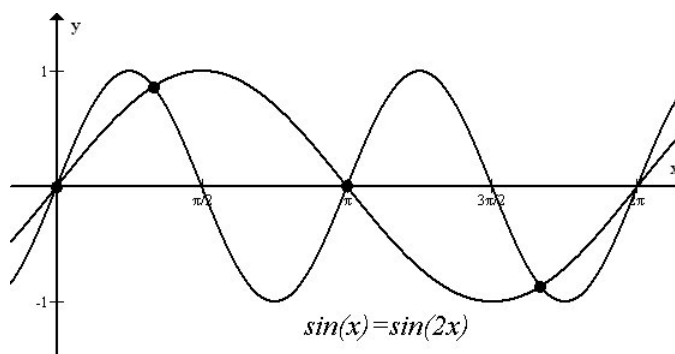




Temas: Ecuaciones trigonométricas. Soluciones principales. Soluciones generales.

1. Introducción

En este documento se revisan ecuaciones en las cuales su variable aparece como argumento de funciones trigonométricas.

2. Ecuaciones trigonométricas

2.1. Definición

Son aquellas en las cuales la incógnita solamente aparece como argumento en funciones trigonométricas.

Son ecuaciones trigonométricas:

$$\sin x = 1, \quad \sin(2x) = 2 \sin x, \quad \cos^2 x - 3 \sin x = 3.$$

No son ecuaciones trigonométricas:

$$x \sin x = 1, \quad x + \cos x = 3.$$

2.2. Resolución de una ecuación trigonométrica

Resolver una ecuación trigonométrica consiste en encontrar los valores del argumento desconocido que satisfacen a la ecuación dada.

Nota: Se llaman *soluciones principales* de una ecuación trigonométrica a aquellas soluciones que se encuentran entre 0 y 2π (o entre 0° y 360°).

No existe un método general para resolver ecuaciones trigonométricas, pero las siguientes sugerencias pueden ser de ayuda:

- Expresar todas las funciones trigonométricas que aparezcan en función de un mismo argumento, usando las identidades trigonométricas. Por ejemplo, si los argumentos $2x$ y x aparecen en la ecuación, expresar las funciones de $2x$ en términos de las funciones de x .
- Expresar todas las funciones en términos de una sola función trigonométrica.
- Resolver algebraicamente (factorizando o de cualquier otra forma) considerando como *incógnita* la única función que ha quedado en la ecuación.

2.3. Ejemplos

1. Dada la ecuación trigonométrica $\cos x = 1 + \sin x$ se pide encontrar:

- Sus soluciones principales, es decir, para valores de x tales que $0 \leq x < 2\pi$.
- Todas sus soluciones.

Solución:

a) Como $\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} &= 1 + \sin x & /()^2 \\ 1 - \sin^2 x &= 1 + 2\sin x + \sin^2 x \\ 2\sin^2 x + 2\sin x &= 0 \\ 2\sin x(\sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

de donde $\sin x = 0$ o $\sin x = -1$. Si $\sin x = 0$ se tiene $x = 0$ o $x = \pi$. Si $\sin x = -1$ se tiene $x = \frac{3\pi}{2}$.

Como en la resolución de esta ecuación trigonométrica se elevó al cuadrado, es posible que se hayan introducido soluciones “extrañas”. Para evitarlas debemos chequear cada una de las soluciones encontradas:

Verificación de $x = 0$.

$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1 + \sin 0 \\ 1 &= 1 + 0 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Luego, $x = 0$ es solución.

Verificación de $x = \pi$.

$$\begin{aligned} \cos \pi &= 1 + \sin \pi \\ -1 &= 1 + 0 \\ -1 &= 1 \end{aligned}$$

Luego, $x = \pi$ no es solución.

Verificación de $x = \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \cos \frac{3\pi}{2} &= 1 + \sin \frac{3\pi}{2} \\ 0 &= 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $x = \frac{3\pi}{2}$ es solución. Por lo tanto, las soluciones principales son:

$$x = 0, \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

b) De las soluciones principales, se tiene que *todas* las soluciones de la ecuación propuesta son:

$$x = 2n\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \text{ con } n \in \mathbb{Z}.$$

2. Dada la ecuación trigonométrica

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0,$$

encontrar sus soluciones principales y todas sus soluciones.

Solución:

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \quad \text{Usando la identidad } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x:$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 1 = 0 \quad \text{Sustituyendo } \sin^2 x \text{ por } 1 - \cos^2 x:$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x + 1 = 0 \quad \text{De donde:}$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \quad \text{Reuniendo términos semejantes:}$$

$$2\cos^2 x + \cos x = 0 \quad \text{Factorizando por } \cos x:$$

$$\cos x(2\cos x + 1) = 0 \quad \text{De donde:}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2\cos x + 1 = 0 = 0$$

Si $\cos x = 0$, se tiene que $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

Si $2\cos x + 1 = 0$, se tiene que $\cos x = -\frac{1}{2}$, de donde $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, $x_4 = \frac{4\pi}{3}$

Por lo tanto, las *soluciones principales* de la ecuación son: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, $x_4 = \frac{4\pi}{3}$, y *todas las soluciones* son: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, donde k es un número entero.

3. Encontrar todas las soluciones entre 0 y 2π de la ecuación:

Solución:

$$\begin{aligned} \tan(2x) + 2\sin x &= 0 \\ \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 2\sin x &= 0 \\ \frac{2\sin x \cos x}{\cos 2x} + 2\sin x &= 0 \\ 2\sin x \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} + 1 \right) &= 0 \\ \underbrace{2\sin x} \cdot \underbrace{\frac{\cos x + \cos 2x}{\cos 2x}} &= 0 \end{aligned}$$

de donde, por una parte:

$$2\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \pi$$

y por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \cos 2x}{\cos 2x} &= 0 \\ \cos x + \cos 2x &= 0 \\ \cos x + 2\cos^2 x - 1 &= 0 \\ (2\cos x - 1)(\cos x + 1) &= 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 &\quad \text{o} \quad \cos x + 1 = 0 \\ \cos x = 1/2 &\quad \text{o} \quad \cos x = -1 \\ \text{entonces } x = \pi/3, x = 5\pi/3 &\quad \text{o} \quad x = \pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto las soluciones requeridas son: $x = 0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$.

3. Actividades

- Determinar las soluciones principales de
 - $\cos x = 0.44$
 - $3 \tan x = 55$
 - $3 \sin x = 4$
 - $3 \sec x = 4$
- Encontrar todas las soluciones entre 0 y 4π de la ecuación $2 \cos x - 1 = 0$.
- Encontrar las soluciones principales de las siguientes de las siguientes ecuaciones.
 - $2 \cos^2 x + 3 = 7 \cos x$
 - $\tan^4 x - 9 = 0$
 - $\cos(3x) \sec x = 2 \cos(3x)$
 - $\sin(2x) = \cos x$
 - $\csc(3x) = \sin(3x)$
 - $\tan(2x) + 2 \sin x = 0$.
- Encontrar los valores entre 0 y 2π , y la forma de la solución general de cada ecuación.
 - $\tan x + 3 \cot x = 4$.
 - $\sin 2x + \cos x + 1$.
 - $\csc x + \cot x = \sqrt{3}$.
 - $1 + 2 \sec^2 \theta \tan^2 \theta - \sec^4 \theta - \tan^4 \theta = 0$.
 - $\tan 2x + 2 \sin x = 0$.
 - $\sin x + \cos x = 1$

4. Desafío

Encontrar las soluciones principales de la ecuación

$$a \sin x + b \cos x = c$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$ o $b \neq 0$.