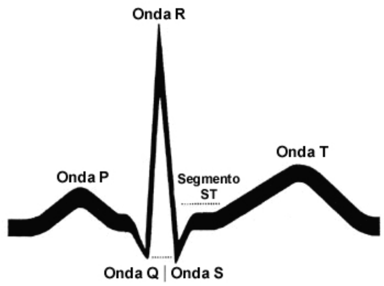
Prof. Claudio del Pino O.



Unidad 1: Funciones reales de una variable real

Temas: Algebra de funciones. Composición de funciones. Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. Función inversa.

Capacidades. **C.1.**: **Manejar conceptos y propiedades de las funciones reales de una variable real, y analizar propiedades de una función desde los puntos de vista numérico (tabla de valores), gráfico y algebraico.**

1.8. Calcula la suma, diferencia, producto, cuocientes y potencias de funciones, determinando adecuadamente su dominio.
1.9. Conoce y calcula la compuesta de dos funciones.

---

1. Introducción

En esta sesión se revisan algunas operaciones con funciones. Por una parte como las imágenes de las funciones son números reales, éstas se pueden operar con las operaciones usuales entre números. Esto da origen a las funciones adición, sustracción, multiplicación y división de funciones, y por otra parte haciendo actuar una función a continuación de otra, se obtiene una nueva función llamada composición de dichas funciones.

2. Álgebra de funciones

Las funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones: suma, diferencia, producto y cuociente, de la siguiente manera:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. $\quad \text{Dom}\,(f \pm g) = \text{Dom}\, f \cap \text{Dom}\, g$.
2. $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$. $\quad \text{Dom}\,(fg) = \text{Dom}\, f \cap \text{Dom}\, g$.
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$. $\quad \text{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right) = (\text{Dom}\, f \cap \text{Dom}\, g) \setminus \{x \ / \ g(x) = 0\}$.

2.1. Ejemplo

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$, entonces

- $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4-1}{x^2}$
- $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1/x^2} = x^4$

y el dominio de cada una de estas funciones es $\mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}$.

2.2. Actividad

Graficar la función $(f \cdot g)(x)$ del ejemplo precedente.

3. Composición de funciones

Sean las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : C \longrightarrow \mathbb{R}$. La función compuesta $g{\circ}f$ está definida siempre y cuando $Rec(f) \subseteq Dom(g) = C$, y en tal caso

$$g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{definida por } (g{\circ}f)(x) = g(f(x)), \text{ para } x \in A$$

Nota: El dominio de $g{\circ}f$ es el conjunto de todos los números x, tales que x está en el dominio de f y $f(x)$ está en el dominio de g.

3.1. Ejemplo 1

Dadas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas de la siguiente manera $f(x) = x^2 + 3x + 1,\ g(x) = 2x - 3$. Se pide:

1. Encontrar $(f{\circ}g)(4),\ (g{\circ}f)(4)$ y $(f{\circ}f)(4)$
2. Mostrar que en general $(f{\circ}g)(x) \neq (g{\circ}f)(x)$
3. ¿Existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $(f{\circ}g)(x) = (g{\circ}f)(x)$?

Solución.

1. • $(f{\circ}g)(4) = f(g(4)) = f(2 \cdot 4 - 3) = f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 41$.
   • $(g{\circ}f)(4) = 55$.
   • $(f{\circ}f)(4) = 929$
2. $(f{\circ}g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$ y $(g{\circ}f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$. Luego, en general,
$$(f{\circ}g)(x) \neq (g{\circ}f)(x).$$
3. $(f{\circ}g)(x) = (g{\circ}f)(x) \Longrightarrow 4x^2 - 6x + 1 = 2x^2 + 6x - 1 \Longrightarrow 2x^2 - 12x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = 3 + 2\sqrt{2}$.

3.2. Ejemplo 2

Considerar las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x - 1$. Encontrar las fórmulas que tienen las siguientes funciones compuestas: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución.

• $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x$

• $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1) - 1 = x^2 - 2$

• $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 - 1) = ((x - 1)^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$

• $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$

4. Función inversa

4.1. Funciones inyectivas

Una función $f : A \longrightarrow B$, es **inyectiva** siempre y cuando

Elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B.

o sea:

Si x e y son elementos de A, entonces $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

o equivalentemente:

Si x e y son elementos de A, entonces $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

Nota: Las funciones inyectivas también suelen llamarse funciones *uno a uno*, lo que se anota *1-1*.

4.1.1. Ejemplo

Es claro que la función $g(x) = (x-1)^2 + 1$ no es inyectiva, ya que, por ejemplo, $g(0) = (0-1)^2 + 1 = 2$ y $g(2) = (2-1)^2 + 1 = 2$.

4.1.2. Ejemplo

Comprobar que la función h definida por $h(x) = \dfrac{2x-1}{6}$ es 1-1.

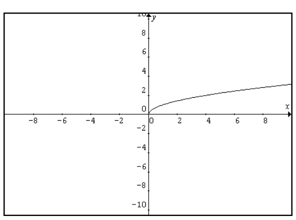
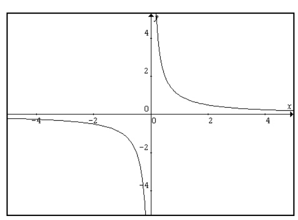
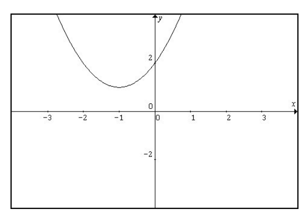
Desarrollo:

$$\begin{array}{rcrcll}
h(x) = h(y) & \Longrightarrow & \dfrac{2x-1}{6} & = & \dfrac{2y-1}{6} & /\cdot 6 \\
& \Longrightarrow & 2x-1 & = & 2y-1 & +1 \\
& \Longrightarrow & 2x & = & 2y & \cdot\dfrac{1}{2} \\
& \Longrightarrow & x & = & y &
\end{array}$$

Por lo tanto, la función h es inyectiva.

4.1.3. Actividad

Considerar los gráficos de 3 funciones.

1. Indicar cuáles son inyectivas
2. Expresar una condición geométrica para establecer, a partir del gráfico de una función, si ella es o no inyectiva.

4.2. Funciones sobreyectivas

Una función $f : A \longrightarrow B$, es *sobreyectiva* (o bien *sobre* o *epiyectiva*) siempre y cuando $rec(f) = B$ o sea, cuando

Para todo $y \in B$, existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$

4.2.1. Ejemplo

Estudiar la sobreyectividad de la función $y = g(x) = x^2 + 1$.

Desarrollo:
La función $y = g(x) = x^2 + 1$ no es sobreyectiva, pues por ejemplo, $-2 \in \mathbb{R} = cod(g)$, no tiene preimagen. En efecto, supongamos que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que: $g(x) = -2$. Entonces, $x^2 + 1 = -2$, o sea, $x^2 = -3$. Pero el $\mathbb{R}$, como se sabe, el cuadrado de todo número es mayor o igual a cero; por lo tanto, el -2 no tiene preimagen.

4.2.2. Ejemplo

Decidir si la función $y = f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ es sobreyectiva.
Desarrollo:

Sea $y \in \mathbb{R}$. Veamos si tiene preimagen, es decir, si existe un $x \in dom(h)$, tal que $f(x) = y$.

$$\begin{array}{rcrcll} f(x) = y & \Longrightarrow & \dfrac{3x+2}{x-1} & = & y & /\cdot(x-1) \\ & \Longrightarrow & 3x+2 & = & y(x-1) & \\ & \Longrightarrow & 3x+2 & = & xy - y & \\ \text{de donde} & & x & = & \dfrac{-2-y}{3-y} & \end{array}$$

por lo tanto, la preimagen de y viene dada por la fórmula $\dfrac{-2-y}{3-y}$. De aquí se deduce que el elemento 3 no tiene preimagen. Por lo tanto f no es sobreyectiva.

4.2.3. Actividad

Verificar que la función $y = f(x) = 5x - 2$ es sobreyectiva.

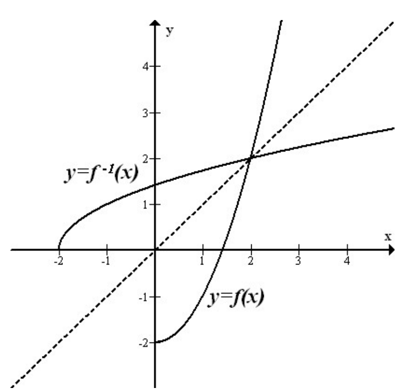
Nota: Cuando una función es a la vez, inyectiva y sobreyectiva, se denomina *función biyectiva*.

4.3. Función inversa

Si una función f de A en B es biyectiva, existe una única función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, llamada *función inversa* de f y definida por:

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

– –



Relación entre el gráfico de una función y su inversa (*cuando tiene inversa*)

Notas:

1. $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, donde la notación id_X denota la función identidad en X, es decir, $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ definida por $\mathrm{id}_X(x) = x$, para todo $x \in X$.
2. Si $y = f(x)$ tiene función inversa, el gráfico de la inversa es el gráfico simétrico respecto a la recta $y = x$, del gráfico de f.

4.3.1. Ejemplo

Sea $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ una función real.

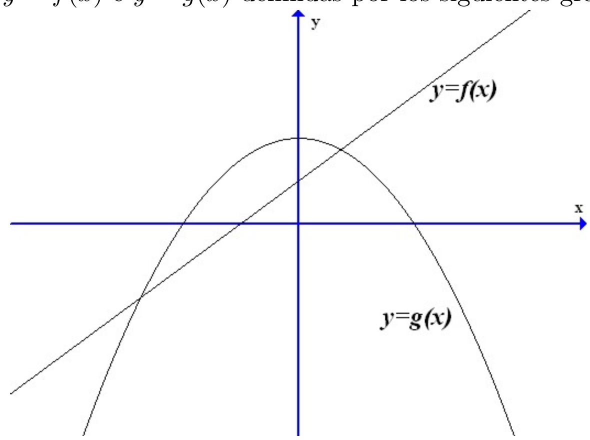
1. Determinar A, el dominio de f.
2. Mostrar que f es inyectiva.
3. Determinar B, el recorrido de f.
4. Verificar que f de A en B tiene inversa y calcular $f^{-1}(x)$.

Desarrollo:

1. $A = Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
2. Sean a, $b \in A$ tal que $f(a) = f(b)$.
   $$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \frac{2a-1}{a+3} = \frac{2b-1}{b+3}$$
   $$\Longrightarrow 2ab + 6a - b - 3 = 2ab + 6b - a - 3 \quad \Longrightarrow a = b.$$
   Luego f es inyectiva.
3. Sea $y \in \mathbb{R}$.
   $(\exists\, x \in A) : f(x) = y \Longleftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+3} = y \Longleftrightarrow 2x - 1 = yx + 3y \Longleftrightarrow x = \dfrac{3y+1}{2-y}$.
   Por lo tanto $B = Rec(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
4. Considerando a f como una función de A en B, determinados anteriormente, se tiene que esta *nueva función* f es biyectiva. Por lo tanto, f es invertible, y $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$.

4.4. Actividades finales

1. Considerar las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ definidas por los siguientes gráficos:



   Hacer un esbozo de los gráficos de $f + g$, $f \cdot g$ y $f \circ g$.

2. Sabiendo que $f(2x - 1) = x^2 - x + 2$, hallar $f(x)$.

3. Si $f(x) = \sqrt{x - 1}$, encontrar una función g de modo que $dom(f + g) = [1, 2]$.

4. Si $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = \sqrt{x}$ y $\gamma(x) = 1 - x$. Expresar la función $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ como compuesta de las funciones α, β y γ.

5. Verificar que los conceptos de función inyectiva y función sobreyectiva son independientes entre sí, es decir, no hay relación entre ser o no inyectiva y ser o no sobreyectiva. Dar ejemplos, en el siguiente cuadro que muestre las cuatro combinaciones posibles:

	Si sobre	No sobre
Si 1-1		
No 1-1		

6. Sea f la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por la relación: $2y = 1 - 3xy$. Sean $A = Dom(f)$ y $B = Rec(f)$.

   a) Determinar A y B.
   b) Probar que $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva.
   c) Calcular $f^{-1}(x)$.

7. Considerar las función f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leqslant 0 \\ 3\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+2} & \text{si } x \geqslant -2 \\ 2x - 1 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

   a) Obtener los gráficos de f y g.

b) Por inspección de los gráficos obtenidos, determinar
   i) si estas funciones son inyectivas, sobreyecticas o biyectivas.
   ii) recorrido de f y g

c) Para las funciones que sean inyectivas,
   i) Hacer un esbozo del gráfico de su función inversa.
   ii) determinar la fórmula de su función inversa.

8. Dada la función

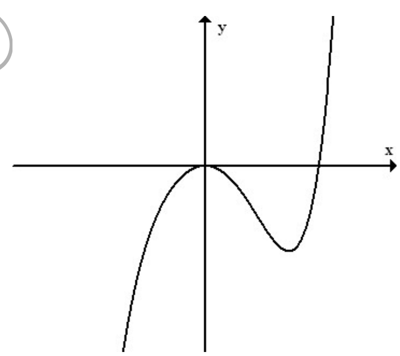
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -2 < x < 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x \leqslant -2 \text{ o si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   a) Hacer un esbozo del gráfico de f.
   b) Verificar que es biyectiva.
   c) Obtener una fórmula para $f^{-1}(x)$.

9. Cada una de las siguientes funciones es inyectiva en el dominio indicado. Determinar su recorrido y una fórmula para su inversa.

Función	Dominio	Recorrido	Función inversa
$y = 2x + 1$	$]-\infty, +\infty[$		
$y = x^2$	$[0, +\infty[$		
$y = x^2$	$]-\infty, 0]$		
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[0, 1]$		
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 0]$		
$y = \frac{1}{1+x^2}$	$[0, +\infty]$		
$y = (1 + x)^2$	$[-1, +\infty[$		
$y = \frac{x+1}{x-1}$	$[1, +\infty[$		

10. Sea $y = f(x)$ una función cuyo gráfico es



hacer un esbozo de los gráficos de a) $y = |f(x)|$ b) $y = f(|x|)$ c) $y = |f(|x|)|$

5. Desafío

Sea $g(x) = 2x + 1$, encontrar una formula general para la función

$$\underbrace{g(g(g(\cdots(g}_{2010 \; veces}(x)\cdots)))$$