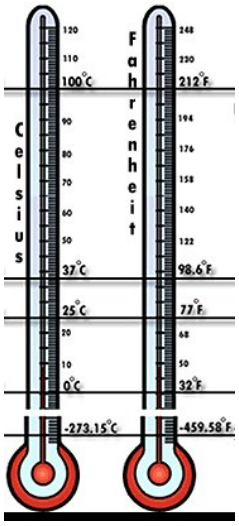


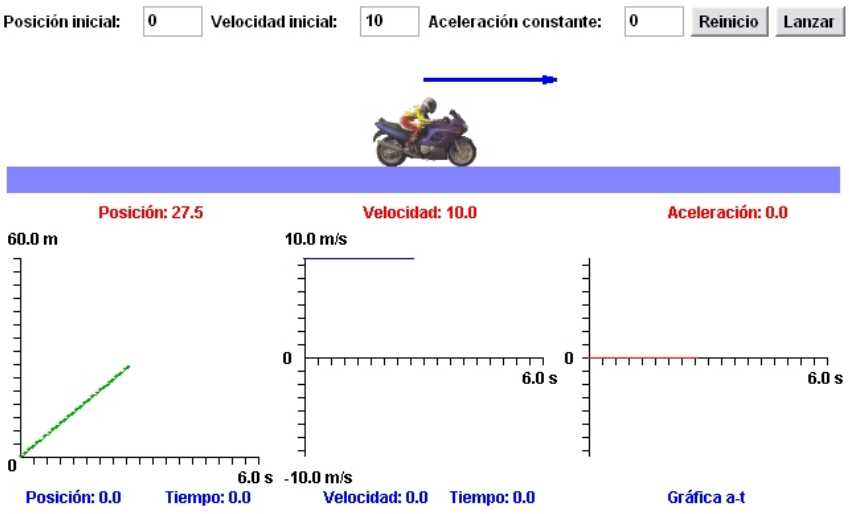
Unidad 1: Funciones reales de una variable real
Tema: Modelos lineales.
Capacidades. C.2.: **Manejar conceptos y propiedades de las funciones lineales y resolver situaciones problemáticas contextualizadas que son modeladas por estas funciones.**

U de Talca

1. Introducción

En esta sesión iniciamos un paseo por los principales modelos funcionales. Este recorrido se inicia con la función más simple: **la función lineal**.

2. Problema inicial: Distancia recorrida versus tiempo, en movimientos con velocidad constante



Movimiento rectilineo [1]

[1] http://www.educaplus.org/movi/

3. Función lineal

Es la función real definida por:

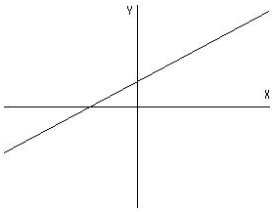
$$f(x) = ax + b, \qquad \texttt{con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$, $Rec(f) = \mathbb{R}$.

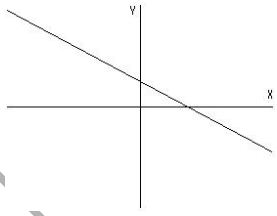
b) Su gráfica es una linea recta. Esta recta *corta* al eje X en el punto $(-\frac{b}{a}, 0)$ y al eje Y en el punto $(0, b)$.

c) La pendiente de la recta es a.

- Cuando $a > 0$, la gráfica de f es creciente. Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$



- Cuando $a < 0$, la gráfica de f es decreciente. Si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$



U de Ta

3.1. Ejemplo

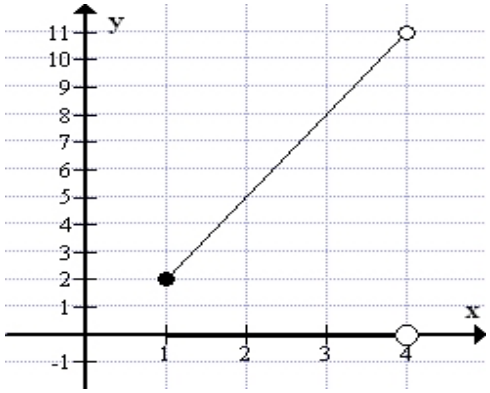
Sea $f(x) = \dfrac{2x-5}{3}$.

1. f es una función lineal. f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$: $Dom(f) = \mathbb{R}$. $Rec(f) = \mathbb{R}$
2. Intersecciones o cortes con los ejes coordenados.
   Con eje X: $y = 0 \Longrightarrow \frac{2x-5}{3} = 0 \Longrightarrow x = 5/2. \rightsquigarrow (5/2,\, 0)$
   Con eje Y: $x = 0 \Longrightarrow y = -5/3. \rightsquigarrow (0, -5/3)$
3. La gráfica de $y = f(x)$ es una recta cuya pendiente es $2/3$. Luego, es creciente.
4. Graficar la función $y = f(x)$.

3.2. Un ejemplo de función definida en un dominio restringido

Sea $f : [1, 4[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por: $f(x) = 3x - 1$.

- $Dom(f) = [1, 4[$ (dominio dado)
- $f(x) = 3x - 1$ es una función lineal, *pero* está definida en un *dominio restringido*: [1, 4[
- La gráfica de $y = f(x) = 3x - 1$, donde $1 \leqslant x < 4$ es el segmento de recta, cerrado en un extremo y abierto en el otro extremo:



PREGUNTA: ¿Cuál es el recorrido de f?.

4. Un modelo lineal

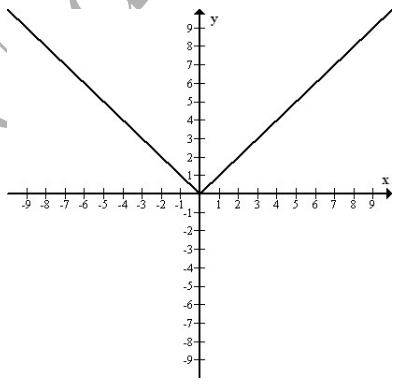
Considerando que las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit están relacionadas por un modelo lineal y observando las correspondencias entre ambas, indicadas en la figura inicial, deducir la fórmula de transición de una escala a la otra, es decir expresar $^\circ C$ en función de $^\circ F$, así como $^\circ F$ en función de $^\circ C$.

5. Función Valor absoluto

La función

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

recibe el nombre de *valor absoluto*, y un esbozo de su gráfico es



5.1. Propiedades

1. $|a| \geqslant 0$, para todo $a \in R$.
2. $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
3. $|-a| = |a|$, para todo $a \in R$.
4. $|a|^2 = a^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
5. $\sqrt{a^2} = |a|$

U de Talca

6. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, para todo $a,\, b \in \mathbb{R}$.

7. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, para todo $a,\, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.

8. Sea $b > 0$:
   - $|x| < b \iff -b < x < b$
   - $|x| > b \iff x > b \quad o \quad x < -b$
   - $|x| \leqslant b \iff -b \leqslant x \leqslant b$
   - $|x| \geqslant b \iff x \geqslant b \quad o \quad x \leqslant -b$

6. Actividades

1. Sea $f(x) = \begin{cases} x+1, & \texttt{si } x < 2 \\ -3x, & \texttt{si } 3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$

   a) Determinar $Dom(f)$.

   b) Calcular la imagen del 0, 4, -6 y 6.

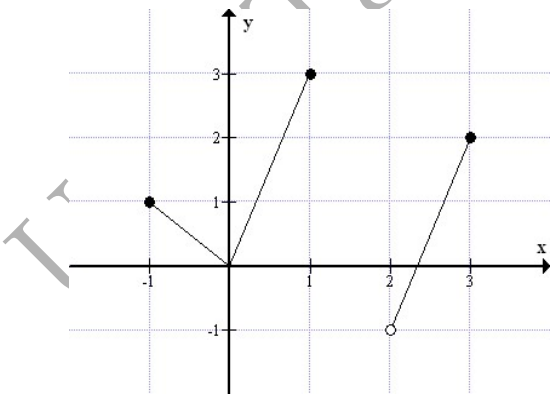
   c) Encontrar preimagenes del 0, 5 y -10.

   d) ¿Esta función tiene inversa?. En caso afirmativo, determinarla.

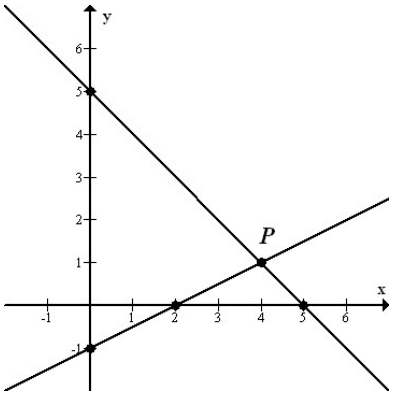
   e) Graficar f y f^{-1} (en caso que exista).

   f) A partir del gráfico de f, obtener los gráficos de $y = f(x) + 2$, $y = f(x+2)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ e $y = |f(x)|$.

2. Determinar el dominio y definir explícitamente la función $y = f(x)$ cuyo gráfico es:



3. En el siguiente esquema aparecen dos rectas, correspondientes a los gráficos de dos funciones lineales



Determinar, gráfica y algebraicamente, las coordenadas del punto de intersección P.

4. Graficar cada una de las siguientes funciones

   a) Función signo: $y = sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   b) Función valor absoluto: $y = f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   c) Función parte entera: $y = [x]$ = mayor entero menor o igual x

   d) Función parte decimal: $y = D(x) =$ la parte decimal de x

   e) Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   a) $sgn(x) = \frac{|x|}{x}$ b) $D(x) = x - [x]$ c) $[-x] = -[x]$ d) $D(-x) = D(x)$

5. Sean L una recta de ecuación $ax + by + c = 0$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto del plano. Verificar que la distancia de P a la recta L viene dada por
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

6. Determinar una función lineal que aplique biyectivamente el intervalo $[1, 3]$ en el intervalo $[-3, -1]$.

7. Una cierta función $y = f(x)$ está definida de la siguiente manera: en cada uno de los intervalos $n \leqslant x < n+1$, donde n es un entero positivo, $f(x)$ varía linealmente, siendo $f(n) = -1$ y $f(n + \frac{1}{2}) = 0$. Hacer un esbozo del gráfico de esta función.

8. Obtener el gráfico de las siguientes funciones

   a) $y = |x - 2|$

   b) $y = |x - 1| + |x - 2| - 3$

   c) $y = ||x - 1| + |x - 2| - 3|$

9. Para la familia de rectas $y = f_m(x) = mx + x + m^2 - 25$, encontrar el o los valores de m, en caso que exista(n), de modo que la(s) recta(s):

   a) pase por el punto $(-1, 2)$.

   b) intersecta al eje Y en el punto $(0, -16)$.

   c) intersecta al eje X en el punto $(5, 0)$.

   d) sea paralela a la recta $2x + 5y = 20$.

   e) sea perpendicular al eje Y.

   f) se intersecte con la recta $x - y = 1$ en el punto $(18, 17)$.

   g) forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{441}{2}$.

7. Desafío

Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante \$15000 si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría \$500 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

U de Talca