Movimientos parabólicos

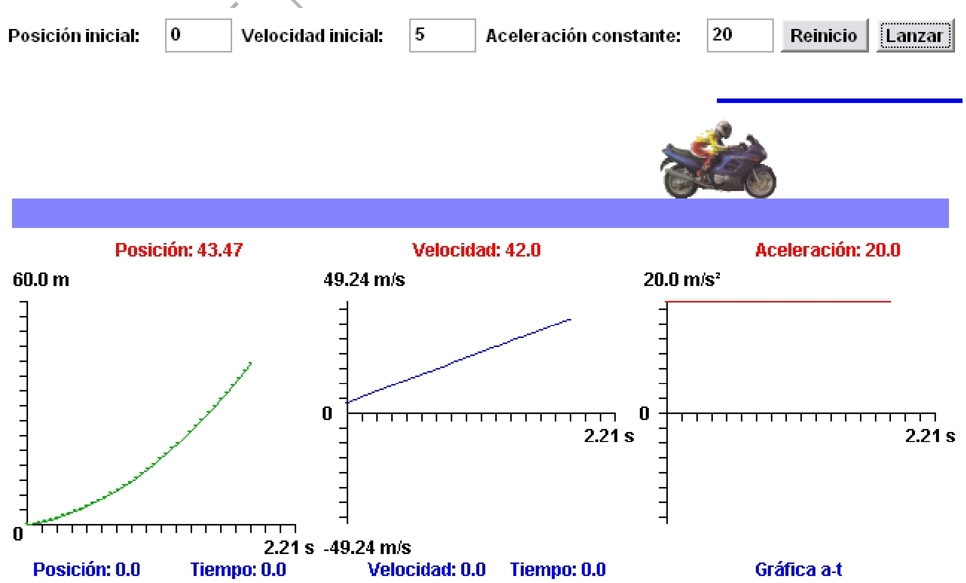
Unidad 1: Funciones reales de una variable real
Tema: Modelos cuadráticos.
Capacidades. **C.2.**: **Manejar conceptos y propiedades de las funciones cuadráticas y resolver situaciones problemáticas contextualizadas que son modeladas por estas funciones.**

---

1. Introducción

Luego de los modelos lineales, el siguiente modelo en términos de aplicación, son los modelos cuadráticos.

2. Problema inicial: Distancia recorrida versus tiempo, en movimientos con aceleración constante



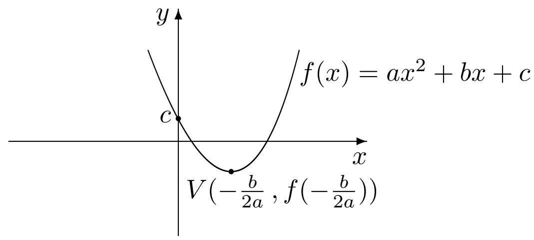
Movimiento parabólico [1]

[1]http://www.educaplus.org/movi/

3. La función cuadrática

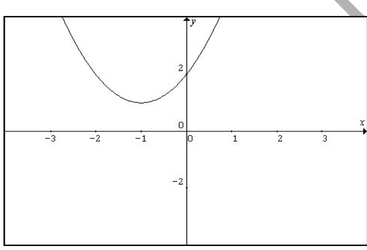
Una *función cuadrática* tiene la forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0, \ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

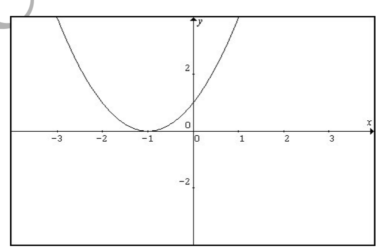


- Intersecta al eje Y en el punto $(0, c)$.
- Intersecta al eje X cuando $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$. En tal caso, los puntos de intersección son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- Su gráfica es una parabóla con vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- La recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ es una recta de simetría de su gráfico.
- Si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, y si $a < 0$ se abre hacia abajo.
- La fórmula de la función cuadrática se puede presentar de varias maneras:
  1. $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
  2. $y = f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

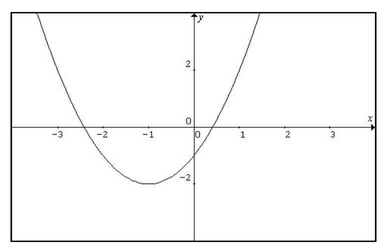
Gráficos de la función cuadrática y $= ax^2 + bx + c$



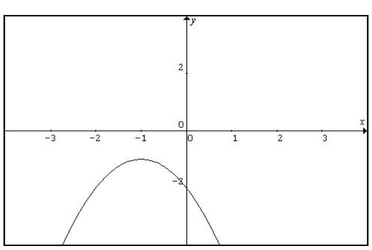
$a > 0, \ \Delta < 0$



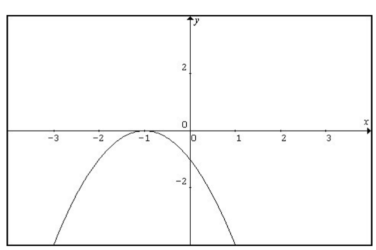
$a > 0, \ \Delta = 0$



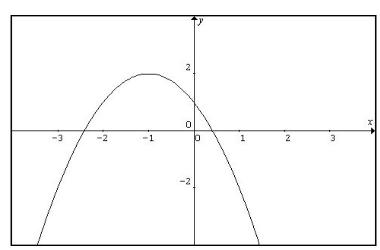
$a > 0, \ \Delta > 0$



$a < 0, \ \Delta < 0$



$a < 0, \ \Delta = 0$



$a < 0, \ \Delta > 0$

4. Ejemplos

1. Cuando se lanza un proyectil desde el origen de coordenadas, con velocidad v_0 y en la dirección de la recta $y = mx$, la trayectoria que sigue su movimiento viene modelada por la siguiente función cuadrática

$$y = mx - \frac{g}{2v_0^2}(1+m^2)x^2 \tag{1}$$

donde y representa la altura del proyectil (en metros), x representa el desplazamiento horizontal del proyectil (en metros) y g la aceleración de gravedad (considerar $g \approx 10m/seg^2$).

Si el proyectil se lanza con una velocidad de $40m/seg$:

a) Verificar que la ecuación de la trayectoria puede ser escrita en la forma: $y = -\dfrac{1+m^2}{320}x\left(x - \dfrac{320m}{1+m^2}\right)$

b) Si el proyectil se lanza en la dirección de la recta $y = x$:

i) Determinar la ecuación de la trayectoria.

ii) Calcular la máxima altura alcanzada por el proyectil

c) Dibujar las trayectorias correspondientes a *diversas rectas* de lanzamiento.

Desarrollo:

a) Sustituyendo los valores de g y $v_0 = 40$ en (1):

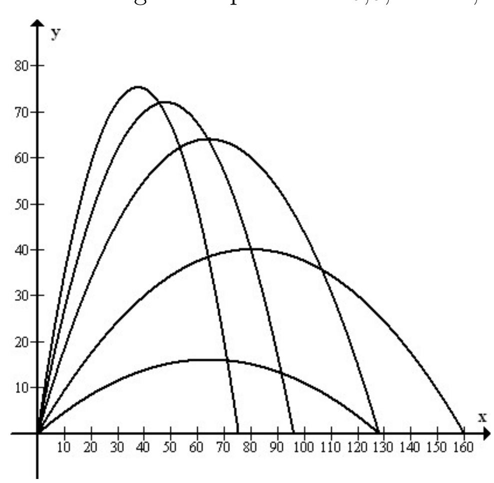
$$\begin{aligned} y &= mx - \frac{10}{2\cdot 40^2}(1+m^2)x^2 \\ &= mx - \frac{1}{320}(1+m^2)x^2 \\ &= -\frac{1+m^2}{320}x\left(x - \frac{320m}{1+m^2}\right) \end{aligned}$$

b) *i*) En este caso $m = 1$, luego

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1+1^2}{320}x\left(x - \frac{320\cdot 1}{1+1^2}\right) \\ &= -\frac{1}{160}x(x-160) \end{aligned}$$

ii) Calculando la ordenada del vértice de la parábola encontrada se obtiene que $y = 40$. Por lo tanto, la máxima altura alcanzada por este proyectil es de $40m$.

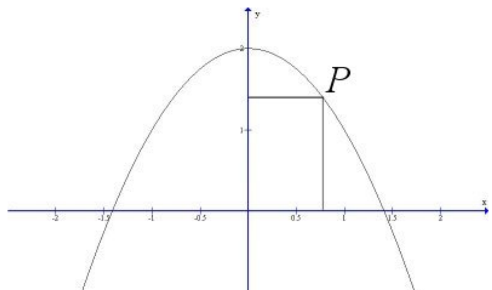
c) En el siguiente esquema se muestran los gráficos para $m = 0{,}5$, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ y $m = 4$.



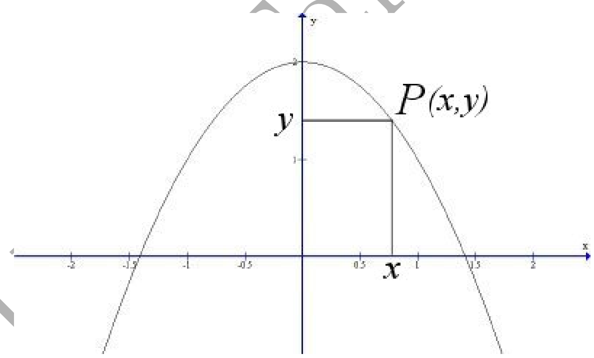
2. Sea $f(x) = -x^2 + 2$. Hallar un punto P de la función en el primer cuadrante de modo que el rectángulo que tiene a P y al origen de coordenadas como vértices opuestos, y que se apoya sobre el eje X y sobre el eje Y, tenga perímetro máximo.

   Nota: Esta actividad es una típica aplicación de la función cuadrática sobre problemas de máximos y mínimos. Se sugiere observar los pasos que se siguen el la solución de esta actividad, pues ellos le pueden servir de guía para enfrentar situaciones similares.

   - **Hacer un dibujo, esquema o diagrama**.
     En este caso, se hace un esbozo de la función dada y del rectángulo indicado.



   - **Asignación de variables**.
     En este caso, como lo buscado es el punto, se eligen las variables que corresponden justamente a las coordenadas del punto P buscado.



   - **Buscar función a maximizar**.
     Es claro que la función a maximizar es $A = 2x + 2y$.
   - **Buscar, de ser necesario, una relación entre las variables**.
     En esta situación, como la función a extremar, ha quedado dependiendo de 2 variables, se debe buscar una relación entre ellas.
     Como $P(x, y)$ es un punto del gráfico de $y = f(x)$, se tiene que $y = 2 - x^2$.
   - **Establecer función a maximizar**.
     En base, a los dos pasos precedentes, se tiene que la función a maximizar es
     $$A = A(x) = 2x + 2(2 - x^2) = -2x^2 + 2x + 4.$$
   - **Buscar el extremo solicitado**.
     Como esta función es cuadrática y el coeficiente de x^2 es negativo, ella tiene un máximo. Este máximo se alcanza en el vértice de la parábola. La abscisa del vértice es $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-2)} = \frac{1}{2}$. Ahora si $x = \frac{1}{2}$, se tiene que la ordenada correspondiente en el gráfico es $y = 2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{7}{4}$.
   - **Dar la respuesta**.
     El punto del gráfico de f en el cual se obtiene el rectángulo de perímetro máximo es $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

5. Actividades

1. La altura s (en metros y medida desde el suelo) de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, desde el centro de la cima de un edificio de 100 metros de altura, viene dada por

$$s = s(t) = -16t^2 + 96t + 100$$

donde t es el tiempo expresado en segundos.

a) ¿En qué instante el objeto está a $100m$ de la cima del edificio?

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el objeto?, ¿en qué instante la alcanza?

c) ¿En qué intervalo de tiempo el objeto se mueve hacia arriba? ¿y hacia abajo?

d) Determinar la distancia total recorrida por el objeto.

2. Al lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba, se mide la altura del proyectil (en metros) en diferentes instantes (en segundos) después de lanzado, obteniendo la siguiente tabla de valores:

t	0	1	3	5	7	8,4	10
d	4	6	8	9	8	6	3

a) Graficar los datos de la tabla de valores obtenidos.

b) En base a la distribución de puntos obtenidos, ¿qué tipo de función podría modelar razonablemente la situación planteada?

c) Obtener una expresión de la función propuesta.

d) Graficar la función encontrada, en el mismo sistema usado para (a).

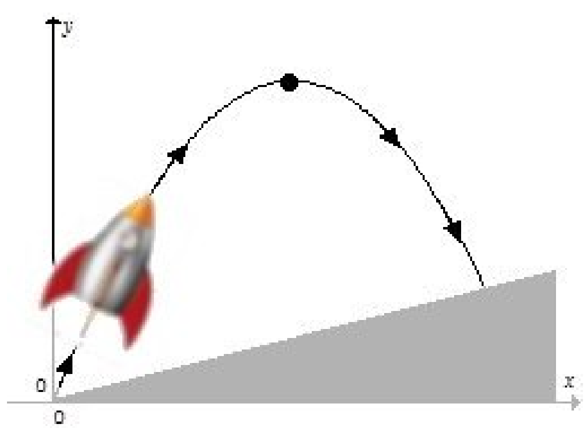
e) Interpolación: ¿A que altura se encuentra el proyectil a los 9seg de ser lanzado?

f) Extrapolación: ¿En qué momento el proyectil vuelve al suelo?

3. Un cohete es disparado, desde la base de una colina, hacia lo alto de ella (ver figura). La colina que tiene una pendiente igual $\frac{1}{5}$ (con respecto a la horizontal del suelo) y la trayectoria del cohete viene dada por

$$y = -0{,}016x^2 + 16x$$

x e y en metros.



a) ¿A qué distancia de la horizontal del suelo toca la colina el cohete?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete (sobre el suelo)?

4. Hallar $f(x+1)$, si se sabe que $f(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.

5. Sea $f(x) = ax^2 + bx + 5$. Encontrar los valores de a y b, de modo que

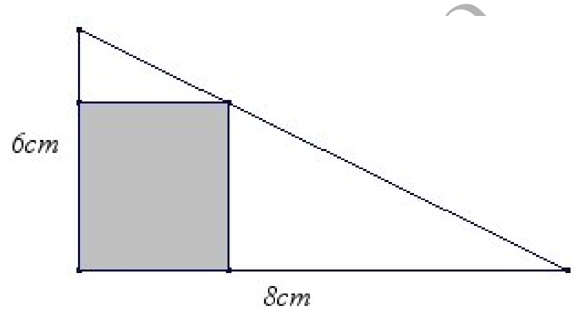
$$f(x+1) - f(x) = 8x + 3$$

6. Determinar los valores de m de modo que el gráfico de la función cuadrática $f(x) = x^2 - mx + m^2 - 3m + 2$ sea tangente al eje X.

7. Presentar el número positivo A como suma de dos sumandos tales que su producto sea el máximo posible.

8. Encontrar un punto P en la recta $y = x$, de modo que la suma de los cuadrados de las distancias de este punto a los puntos $(-a, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ sea la menor posible.

9. Se dispone de una hoja triángular de cartulina como en la figura. De ella se quiere sacar un rectángulo, cortando como se indica en la siguiente figura. Determinar las longitudes del rectángulo de mayor área que se puede obtener de esta manera.



10. Se desea construir una caja de base rectangular de $2cm$ de ancho. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si las sumas de todas sus aristas debe ser igual a $40cm$.

11. Un barco parte hacia el sur, desde un muelle, a las 2:00PM, con una velocidad de 20 $\frac{km}{h}$. Otro barco que viene desde el este a 15:00$\frac{km}{h}$ llega a este muelle a la 15P.M. ¿A qué hora ambos barcos se encontraron lo más cerca posible?.

6. Desafío

1. Determinar los puntos en los cuales la función $f(x) = \sqrt{5x^2 + x + 1}$ intersecta a la parábola $y = -5x^2 - x + 5$.

2. Verificar que la función $f(x) = \frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}$ tiene como recorrido todos los reales, cuando $0 < c \leqslant 1$