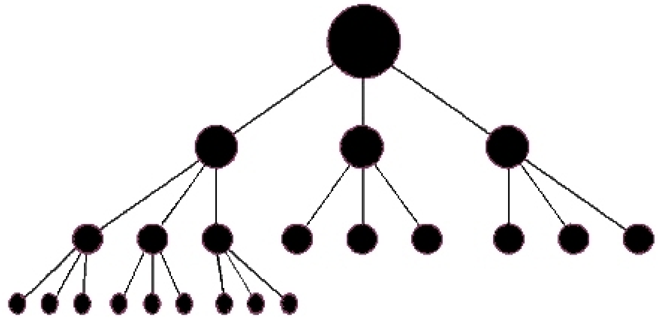


Unidad 1: Funciones reales de una variable real
Tema: Modelos cuadráticos.
Capacidades. **C.2.**: **Manejar conceptos y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas y resolver situaciones problemáticas contextualizadas que son modeladas por estas funciones.**
Temas: Función exponencial. Función logarítmica. Algunas propiedades de los logaritmos. Algunos modelos de crecimiento/decrecimiento.

---

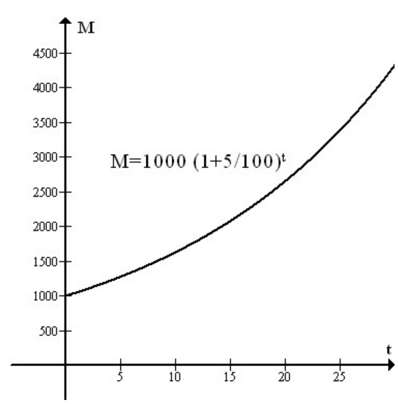
1. Introducción

Dos de la funciones más importantes que se presentan en el estudio de las aplicaciones de la matemática son la función exponencial $y = a^x$, y su inversa, la función logarítmica $y = \log_a x$.
La relevancia de estas funciones radica en el hecho que muchas y variadas situaciones de la realidad, pueden ser modeladas por ellas: *sonoridad* de un sonido, crecimiento de poblaciones, evolución de la temperatura de un cuerpo, desintegración de elementos radioactivos, magnitud de sismos, medición del aprendizaje, acumulación de intereses bancarios, etc.

2. Problema inicial: Interés compuesto

Si se hace un depósito de \$$C$ en un banco que ofrece un $i\,\%$ de interés compuesto anualmente, verificar que el monto acumulado, M, después de t años viene dado por:

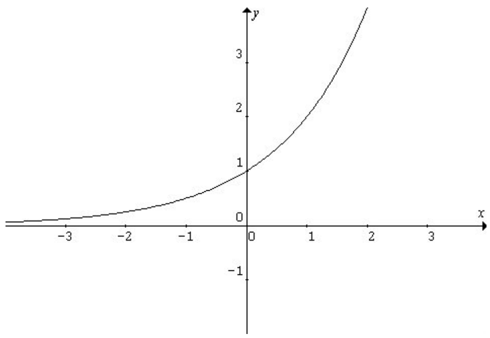
$$\mathbf{M = M(t) = C\left(1 + \frac{i}{100}\right)^{n}}$$



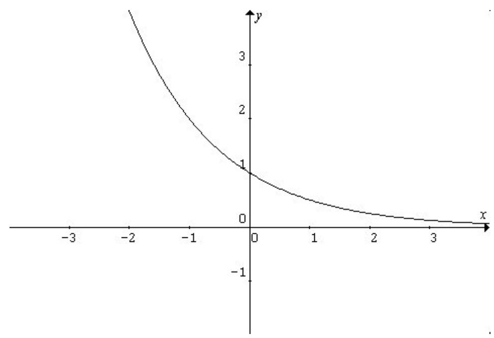
Monto acumulado a partir de \$1000 con interés del 5 % compuesto anualmente

3. Función exponencial

Una *función exponencial* con *base* a, tiene la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$



$f(x) = a^x,\ a > 1$



$f(x) = a^x,\ 0 < a < 1$

- El dominio de una función exponencial es $\mathbb{R}$, su recorrido es $\mathbb{R}^+$.
- La función exponencial es biyectiva.
- La gráfica de toda función exponencial intersecta al eje Y en $(0, 1)$ debido a que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$. Con el eje X no hay intersección.
- La función exponencial es creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.
- Una base que se utiliza con frecuencia en las funciones exponenciales es el número irracional e, donde $e \approx 2,71828$.

4. Función logarítmica

Como se acaba de recordar, toda función exponencial

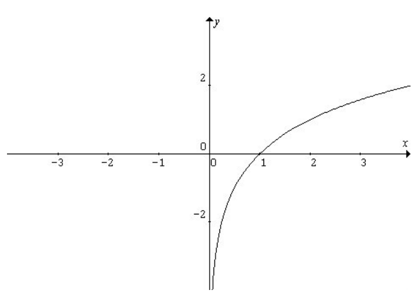
$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto y = f(x) = a^x \end{aligned}$$

es biyectiva, y por lo tanto tiene inversa:

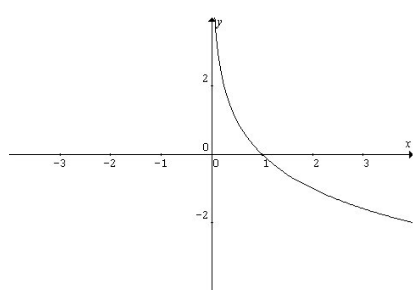
$$\begin{aligned} f^{-1}\ :\ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f^{-1}(x) \end{aligned}$$

esta función inversa recibe el nombre de función logarítmica, y se anota como $\log_a x$. Así entonces,

Una *función logarítmica* con *base* a, tiene la forma $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$



$f(x) = \log_a x,\ a > 1$



$f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$

- El dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, el recorrido es $\mathbb{R}$.
- La función logarítmica es biyectiva.

- La gráfica de cualquier función logarítmica intersecta al eje X en $(1,0)$ debido a que $\log_a 1 = 0$. Con el eje Y no hay intersección.
- La función logarítmica es creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.
- Como la función logarítmica es la función inversa de la exponencial, y viceversa:
- A los logaritmos con base e se les llama *logaritmos naturales* y se denotan por ln, a los de base 10 se les denomina *logaritmos comunes* y se les simboliza por log. Es decir,

$$\log_e x = \ln x \qquad \log_{10} x = \log x$$

  Luego,

$$\begin{array}{ccc} y = \log x & \Longleftrightarrow & x = 10^y \\ y = \ln x & \Longleftrightarrow & x = e^y \end{array}$$

4.1. Algunas propiedades de los logaritmos

Para valores apropiados, se cumple que:

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^{\,c} = c \log_a b$
4. Si $\log_a b = \log_a c$, entonces $b = c$
5. $\log_a 1 = 0$
6. $\log_a a^b = b$. En particular, $\log 10^x = x$ y $\ln e^x = x$.
7. $a^{\log_a b} = b$. En particular $10^{\log x} = x$ y $e^{\ln x} = x$
8. *Cambio de base*: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

5. Algunos modelos de crecimiento/decrecimiento

5.1. Modelo de crecimiento/decrecimiento exponencial (geométrico)

Principio: *Una población de tamaño P crece a una tasa que es proporcional al tamaño de dicha población.*
Luego, si $P = P(t)$ representa el número de individuos de una determinada población en el tiempo t, entonces la función que modela esta situación es:

$$P = P_0 e^{kt}$$

donde $P = P_0$ en $t = 0$.
Cuando $k > 0$, P crece y cuando $k < 0$, P decrece.

Crecimiento exponencial $(k > 0)$

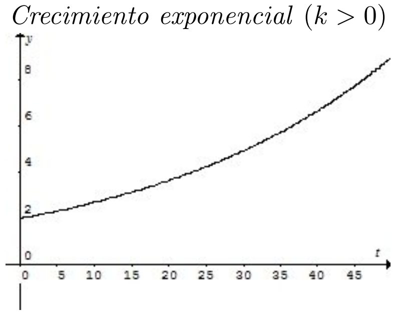


Gráfico de $y = 2e^{0,03x}$

Decrecimiento exponencial $(k < 0)$

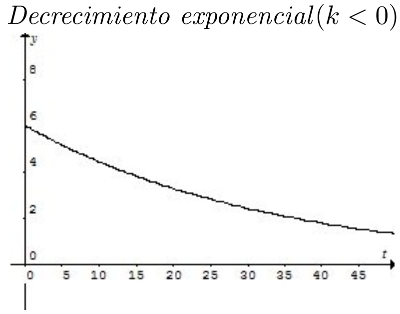


Gráfico de $y = 6e^{-0,03x}$

5.2. Modelo de crecimiento logístico

Principio: *Una población de tamaño P crece a una tasa que es proporcional al producto del tamaño de dicha población con la diferencia entre el tamaño máximo posible de la población y el tamaño de dicha población.*
Luego, si $P = P(t)$ representa el número de individuos de una determinada población en el tiempo t, entonces la función que modela esta situación es:

$$P = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

donde $P = P_0$ en $t = 0$. M representa el máximo número de individuos que la población puede alcanzar.
Es claro que la función de crecimiento también se puede escribir como:

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kMt}} \qquad \text{donde} \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}$$

Crecimiento logístico

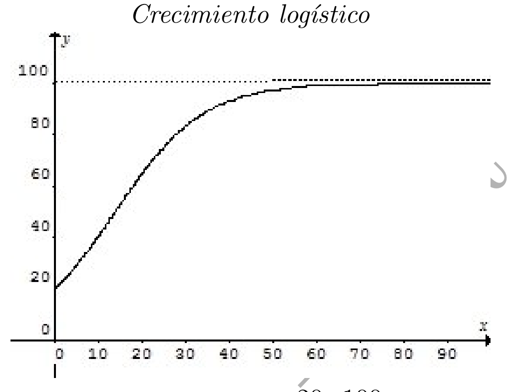


Gráfico de $y = \dfrac{20 \cdot 100}{20 + 80e^{-0{,}01 \cdot 100 \cdot t}}$

5.3. Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

Este modelo permite conocer como evoluciona la temperatura de un objeto.
Principio: *La razón de cambio de la temperatura $T = T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura t_m del medio ambiente.*
Luego, si $T = T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el instante t, entonces la función que modela esta situación es:

$$T = T(t) = t_m + (t_0 - t_m)e^{-kt}$$

donde t_0 es la temperatura inicial del cuerpo (es decir, cuando $t = 0$), t_m es la temperatura del medio ambiente y k es una constante positiva que depende de la situación en estudio.

Ley de Newton (enfriamiento)

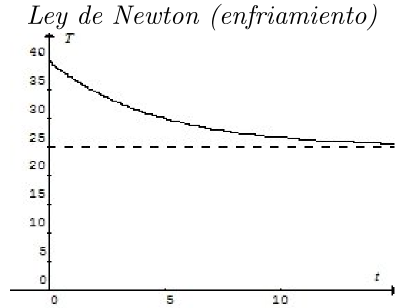
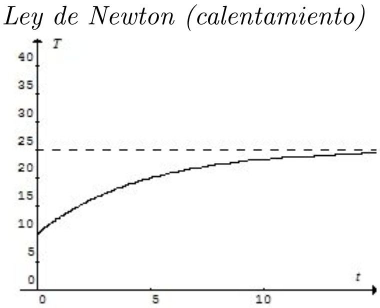


Gráfico de $y = 25 + 15e^{-0{,}22t}$

Ley de Newton (calentamiento)



(b)Gráfico de $y = 25 - 15e^{-0{,}22t}$

6. Ejemplos

1. En la relación $i = 1{,}5e^{-200t}$, se pide:

   a) Encontrar el valor de i cuando $t = -0{,}001$.
   b) Encontrar el valor de t cuando $i = 1$.

   Desarrollo:

   a) $t = -0{,}001 \quad \Rightarrow \quad i = 1{,}5e^{(-200)\cdot(-0{,}001)} \quad \Rightarrow \quad i \approx 1{,}8$
   b) $i = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1{,}5e^{-200t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 0{,}002$

2. Sea $f(x) = \log(x^2 - x)$ una función real.

   a) Determinar el Dominio de f.
   b) Sea g la función real definida por: $g(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4\cdot 10^x}}{2}$. Determinar $(f \circ g)(x)$, expresando el resultado en la forma más simple.

   Desarrollo:

   a) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - x > 0\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
   b)
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f\left(\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 10^x}}{2}\right) \\
&= \log\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 10^x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 10^x}}{2}\right)\right) \\
&= \log\left(\frac{1+2\sqrt{1+4\cdot 10^x}+1+4\cdot 10^x}{4} - \frac{1+\sqrt{1+4\cdot 10^x}}{2}\right) \\
&= \log\frac{2+2\sqrt{1+4\cdot 10^x}+4\cdot 10^x - 2 - 2\sqrt{1+4\cdot 10^x}}{4} \\
&= \log 10^x = x
\end{aligned}
$$

3. Resolver la siguiente ecuación logarítmica
$$\log_8(x-6) + \log_8(x+6) = 2$$

   Desarrollo:
   Como el dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, se tiene que las soluciones de esta ecuación, de tenerlas, deben cumplir $x - 6 > 0$ y $x + 6 > 0$, es decir, $x > 6$.

$$
\begin{aligned}
\log_8(x-6) + \log_8(x+6) &= 2 \\
\log_8(x-6)(x+6) &= 2 \\
\log_8(x^2-36) &= 2 \\
x^2 - 36 &= 8^2 \\
x^2 &= 100 \\
x &= \pm 10
\end{aligned}
$$

Como x debe ser mayor que 6, la única solución de la ecuación propuesta es $x = 10$.

4. Supóngase que una población experimental de moscas de la fruta aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si al inicio hay 100 moscas y 4 días después hay 600 moscas:

   a) Determinar la función que modela la situación planteada.

   b) ¿Cuántas moscas habrán en el décimo día?

   c) ¿Después de cuántos días habrán 20000 moscas?

   Desarrollo:

   a) La función que modela esta situación tiene la forma $P = P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P representa el tamaño de la población de moscas y t la cantidad de días transcurridos.

   Como $P(0) = 100$: $\quad 100 = P_0 e^{k\cdot 0} = P_0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = 100$. Luego, $P = 100e^{kt}$

   Como $P(4) = 600$: $\quad 600 = 100e^{k\cdot 4} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}45$

   Por lo tanto, la función que modela la situación es $P = P(t) = 100e^{0{,}45t}$

   b) Para el día décimo: $P = 100e^{0{,}45\cdot 10} \approx 9002$. Luego, en el día décimo hay, aproximadamente, 9002 moscas.

   c) $20000 = 100e^{0{,}45t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 12$. Luego, después de 12 días hay, aproximadamente, 20000 moscas.

5. El número de bacterias, y, en un cultivo en un tiempo t (en días) está dado por la función $y = 50\mathrm{e}^{2t}$

   a) ¿Cuál es el número de bacterias en el instante inicial ($t = 0$)?

   b) ¿En qué momento el número de bacterias será el doble del inicial?

   Solución:

   a) Cuando $t = 0$, se tiene $y = 50\mathrm{e}^{(2)(0)} = 50\mathrm{e}^0 = 50$. Luego, en $t = 0$ hay 50 bacterias.

   b) La colonia tendrá 100 (que corresponde al doble del original) bacterias cuando t satisfaga la relación: $100 = 50\mathrm{e}^{2t}$.
   De donde, $\mathrm{e}^{2t} = 2$, aplicando logaritmo natural se tiene: $2t = \ln 2$, luego $t \approx 0,346$
   Por lo tanto, en aproximadamente $0,346$ días $= 8,32$ horas la colonia se duplica.

6. Suponer que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 70° y que un objeto se enfría de 350° a 150° en 45 minutos. ¿Qué tiempo se necesitará para enfriar dicho objeto hasta una temperatura de 80°?

   Solución:

   Sean t la variable que representa el tiempo (medido en minutos) y T la variable que representa la temperatura (en °C) del objeto en el instante t.

   Luego, de la Ley de enfriamiento de Newton y como la temperatura del medio ambiente es de 70° y la temperatura inicial del objeto es de 350°:

   $T = 70 + (350 - 70)e^{-kt}$, es decir $T = 70 + 280e^{-kt}$

   Como en $t = 45$, $T = 150°$, se tiene que : $150 = 70 + 280e^{-k\cdot 45}$.

   De donde $k = \dfrac{\ln(2/7)}{45} \approx 0{,}028$. Por lo tanto: $T = 70 + 280e^{-0{,}028t}$

   Ahora bien, para encontrar el tiempo t en el cual el cuerpo llega a la temperatura de 80°, reemplazamos T por 80 en la relación precedente y despejamos t. Al hacerlo, se obtiene que $t \approx 119$ minutos.

   Por lo tanto, aproximadamente después de 119 minutos, la temperatura del cuerpo es de 80°.

7. Actividades

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $\log_2 x = 4$ b) $\log x(x-1) = -1$ c) $\log_x 49 = 2$

   d) $2^{3x+5} = 8$ e) $x^6 = 126x^3$ f) $2\log_2 34x = 348$

   g) $7^{5x^2+3x-92} = 1$ h) $x^{2\ln x} = 35$ i) $\ln(x^2 - x) = 2$

   j) $\log_x (6-x) = 2$ k) $\log_8 64 = x - 1$ l) $25^{x+2} = 6^{3x-2}$

   m) $\log\sqrt{x-1} + \log\frac{\sqrt{x+4}}{x+1} = 0$ n) $2^{x-1} + 2^{x-2} = 12$ o) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

2. Aplicando propiedades de logaritmos, desarrollar las siguientes expresiones:

   (a) $\log(a \cdot b \cdot c)$ (b) $\log\left(\dfrac{a \cdot b}{c}\right)$ (c) $\log\left(\dfrac{a}{b \cdot c}\right)$

   (d) $\ln\left(\dfrac{a^2 \cdot \sqrt[3]{b}}{c^3}\right)$ (e) $\ln\left(\dfrac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b}}{c^{-3}}\right)$ (f) $\ln\left(ab^2 \cdot \dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^3}\right)$

3. Escribir las siguientes expresiones usando un sólo logaritmo:

   (a) $\log a + \log b$ (b) $\ln 2 + \ln a - \ln c$

   (c) $\dfrac{2}{3}\left(\log a - 5\left(\log b + \dfrac{2}{7}\log c\right) - \dfrac{3}{2}\log d\right)$ (d) $\dfrac{2}{5}\log a + 4(\log b - 7\log c)$

   (e) $\dfrac{1}{3}\left(\log 3 + 2\log a - \dfrac{1}{4}\log b + \dfrac{1}{2}\log c\right)$ (f) $2\ln a - 4\ln b$

4. Según una propiedad de logaritmos, $\log x^2 = 2\log x$. Graficar las funciones $y_1 = \log x^2$ e $y_2 = 2\log x$. Comentar.

5. En un estudio de ayuno, el peso de un voluntario bajó de 90 Kg a 60 Kg en 60 días. Si el peso se elimina siguiendo el modelo de decaimiento exponencial:

   $$N = N(t) = N_0 e^{-kt}$$

   donde, t está medido en días, N_0 peso inicial del voluntario, medido en kilos, N peso del voluntario, después de t días iniciado el experimento y k es la constante de eliminación.

   a) Encontrar la función que modela el problema.
   b) Graficar la función obtenida.
   c) ¿Cuál era el peso del voluntario un mes después de haber iniciado el tratamiento?.
   d) Por cuánto tiempo es conveniente realizar el estudio de ayuno, sin perjudicar la salud del voluntario, si lo mínimo que puede llegar a pesar es 50 kg.

6. El estroncio 90 se utiliza en los reactores nucleares y se desintegra según la fórmula de decaimiento exponencial:

   $$A = P\mathrm{e}^{-0{,}0248t}$$

   donde P es la cantidad presente cuando $t = 0$ y A es la cantidad restante después de t años. Calcular la vida media del estroncio 90 (la vida media es el tiempo que toma la cantidad original en disminuir a su mitad).

7. Una ley de curación de las heridas es $A = Be^{-\frac{n}{10}}$, siendo A (en cm^2) el área dañada después de n días, y B (en cm^2) el área original dañada. Hallar el número de días necesarios para reducir a su tercera parte el área dañada.

8. Un objeto se calienta a 100°C y luego se deja enfriar en un cuarto cuya temperatura es de 30°C. La temperatura del objeto es 80°C luego de 5 minutos. Usando el modelo de enfriamiento de Newton, ¿cuándo la temperatura será 50°C?

9. Se ha encontrado que el oído humano responde al sonido en una escala que es, aproximadamente, proporcional al logaritmo (en base 10) de la intensidad del sonido. Así, la altura del sonido, medida en decibeles (dB), viene definida por la siguiente relación:

$$b = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

donde I es la intensidad (altura) del sonido e I_0 es la mínima intensidad detectable (*umbral auditivo*[1]).

a) ¿Qué altura tiene el sonido, si su intensidad es el triple que la mínima detectable?

b) ¿Cuántas veces la mínima intensidad detectable, es la intensidad de un avión a chorro que tiene una altura del sonido de 110dB?

c) Una calle congestionada tiene una altura del sonido de 70dB, y una remachadora tiene una de 100dB. ¿Cuántas veces mayor es la intensidad del sonido I_r de la remachadora que el sonido de la calle congestionada, I_c?

8. Desafío

Calcular el valor de cada una de las siguientes expresiones:

1. $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2010}\right)$

2. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{2010} 2009$

[1]El umbral auditivo equivale a $10^{-12} Watts/m^2$. Observar que el umbral auditivo corresponde a 0dB.