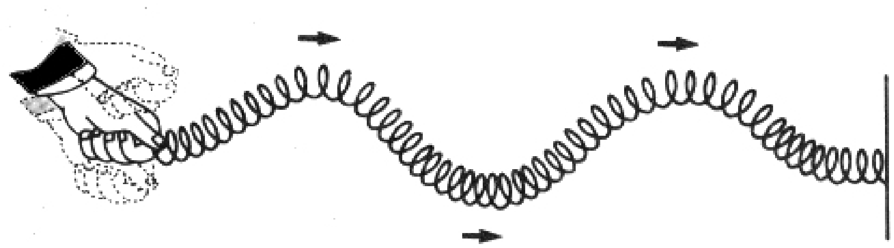


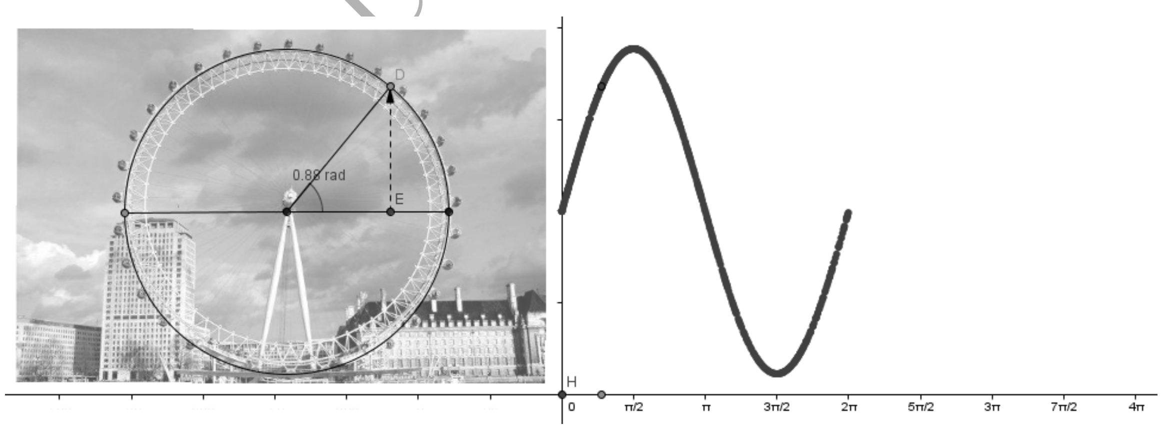
Temas: FT en triángulos rectángulos. FT para ángulos agudos. FT para cualquier ángulo. FT definidas para números reales.

1. Introducción

En esta sesión iniciamos el estudio de los modelos funcionales que regularmente se usan para modelar situaciones problemáticas periódicas. Una situación se dice periódica cuando su comportamiento, aproximadamente, se repite de manera regular. Algunas de estas situaciones son la oscilación de un péndulo, la variación de temperaturas en un mismo día y en un mismo lugar, posición de los planetas, etc.
Estos modelos funcionales son las funciones trigonométricas (FT) reales. Para definirlas primero se hace para un ángulo de un triángulo rectángulo, luego para un ángulo agudo, a continuación para ángulos generales, y finalmente para todo número real.

2. Problema inicial: Rueda de la fortuna

Una *Rueda de la Fortuna*[1] de una feria de atracciones tiene un radio de 10 metros y tarda 30 segundos en dar una vuelta completa. Una persona se sube a la Rueda de la Fortuna. Determinar la función que corresponde la altura del cestillo donde se encuentra dicha persona, durante los 2 primeros minutos. En caso de requerir alguna información adicional, usted asígnela.

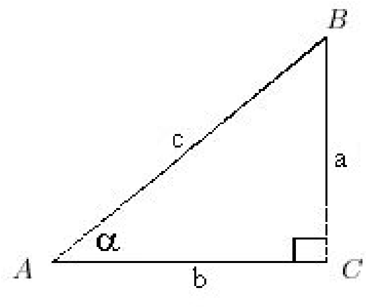


Movimiento periódico

[1] También conocida con el nombre de *vuelta al mundo* o *rueda de Chicago*

3. FT para ángulos agudos en un triángulo rectángulo

Sea ABC un triángulo rectángulo como en la siguiente figura, y α uno de sus ángulos agudos.



Las FT del ángulo α viene definidas por:

seno $\alpha =$ **sin** $\alpha = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa}$

coseno $\alpha =$ **cos** $\alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa}$

tangente $\alpha =$**tan** $\alpha = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$

cosecante $\alpha =$ **csc** $\alpha = \frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto}$

secante $\alpha =$ **sec** $\alpha = \frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente}$

cotangente $\alpha =$**ctg** $\alpha = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

3.1. Actividades

Sea α el ángulo agudo del triángulo rectángulo anterior:

1. Verificar que
$$\frac{\sec\alpha + \tan\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha - \cos\alpha} = \csc\alpha$$
2. Sabiendo que $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, determinar los valores de las restantes 5 funciones trigonométricas del ángulo α.
3. Verificar que

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

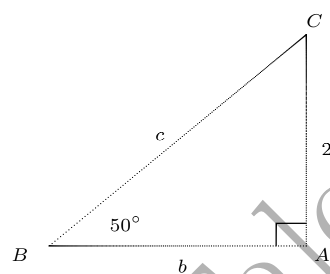
4. Comprobar que
   - $\tan\alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\alpha}$, $\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\ \alpha}$
   - $\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\quad \csc\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$
   - $\cot\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$, $\quad \tan\ \alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$

- $\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$
- $1 + \tan^2\alpha = sec^2\alpha$
- $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = csc^2\alpha$

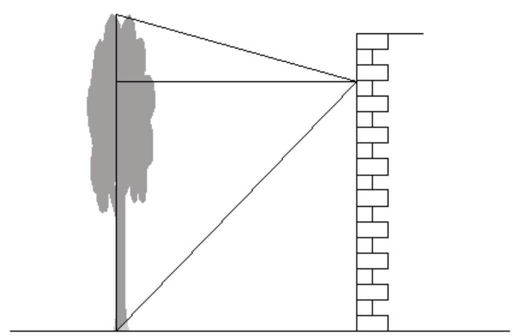
5. Expresar en función de $\sin\alpha$, cada una de la 5 funciones trigonométricas de A. Por ejemplo, $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

6. El hilo que sujeta a un volantín (suponiéndolo perfectamente extendido) tiene 170m. Si el ángulo de elevación del volantín es de 64,0°, ¿a qué altura se encuentra?

7. Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte que ha caído hacia el suelo forma con éste un ángulo de 50° y si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 20 m?

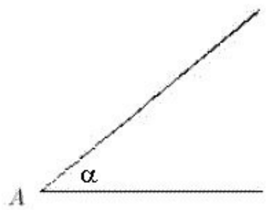


8. Desde una torre de observación de 25 m. de alto, un hombre observa desde una posición situada a 2 m. bajo el extremo superior de la torre que el ángulo de elevación de la copa de un árbol es de $12°40'$ y que el ángulo de depresión de su base es de $72°20'$. Si las bases de la torre y del árbol están a un mismo nivel horizontal, ¿Cuál es la altura del árbol?.

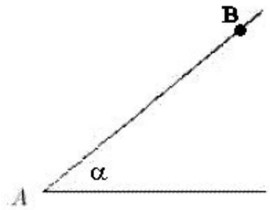


4. FT para ángulos agudos

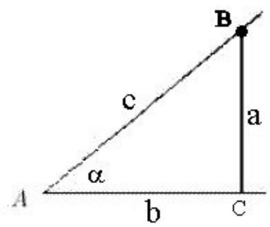
Sea α un ángulo agudo. Desde un punto B *cualquiera* de su lado terminal se traza el segmento perpendicular a su lado inicial. Se forma así un triángulo rectángulo ABC, de catetos a y b e hipotenusa c:



Ángulo agudo



Punto B elegido



Triángulo rectángulo formado

En base al triángulo rectángulo ABC se definen las FT del ángulo agudo α:

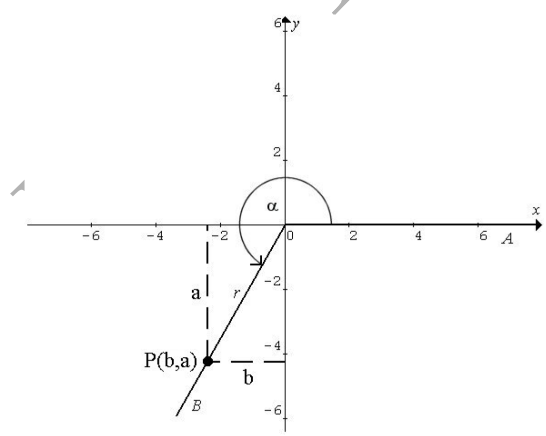
$$\textbf{seno}\ \alpha = \textbf{sin}\ \alpha = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} \qquad \textbf{cosecante}\ \alpha = \textbf{csc}\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto}$$

$$\textbf{coseno}\ \alpha = \textbf{cos}\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} \qquad \textbf{secante}\ \alpha = \textbf{sec}\ \alpha = \frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente} \tag{4}$$

$$\textbf{tangente}\ \alpha = \textbf{tan}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \textbf{cotangente}\ \alpha = \textbf{ctg}\ \alpha = \frac{a}{a} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

5. FT de un ángulo cualquiera

Sea α la medida de un ángulo AOB (OA lado inicial, OB lado terminal). Se ubica este ángulo, en su posición normal, en un sistema de coordenadas, esto quiere decir que su vértice se ubica en el origen del sistema de coordenadas y su lado inicial sobre el eje X. Sea $P = (a, b)$ un punto en el lado terminal (OB) y $r = \sqrt{a^2 + b^2}$:



Entonces, las funciones trigonométricas para el ángulo α se definen, siguiendo las definiciones en (4), de la siguiente manera:

$$\textbf{sin}\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ P}{OP} = \frac{a}{r} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{OP}{ordenada\ de\ P} = \frac{r}{a}$$

$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{abscisa\ de\ P}{OP} = \frac{b}{r} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{OP}{abscisa\ de\ P} = \frac{r}{b}$$

$$\textbf{tan}\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ P}{abscisa\ de\ P} = \frac{a}{b} \qquad \textbf{ctg}\ \alpha = \frac{abscisa\ de\ P}{ordenada\ de\ P} = \frac{b}{a}$$

6. FT definidas para números reales

Como ya se ha dicho, en este curso se estudian las funciones reales. Por esta razón se requiere tener definidas todas la FT para números reales. Un camino para lograr este objetivo es procediendo de la siguiente manera:

Sea x un número real cualquiera. Entonces, teniendo como referencia las FT de un ángulo cualquiera de la sección precedente, las FT para x vienen definidas por

$$\sin x = \sin(x\ rad), \qquad \cos x = \cos(x\ rad), \qquad \tan(x) = \tan(x\, rad) \qquad etc.$$

es decir,

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sin(x) = \sin(x\, rad) \\ \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \cos(x) = \cos(x\, rad) \\ \tan : dom(\tan) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \tan(x) = \tan(x\, rad), \end{aligned}$$

donde[2] $dom(\tan) = \{(2n+1)\frac{\pi}{2} \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$, etc.

7. Ejemplo: Un modelo trigonométrico

En cierta ciudad la función que representa (aproximadamente) la temperatura promedio en la semana x de un año viene dada por:

$$y = T(x) = 15 \sin\left(\frac{\pi x}{24}\right) + 5$$

donde y está expresado en grados Celcius y x varía entre 1 y 48.

Nota: En esta situación se asume que todo mes tiene 4 semanas.

Determinar, aproximadamente, la temperatura promedio en la tercera semana de Mayo.

Desarrollo:

La tercera semana de Mayo corresponde a $x = 19$. Por lo tanto, la temperatura promedio de esta semana es:

$$y = T(19) = 15 \sin\left(\frac{\pi \cdot 19}{24}\right) + 5 \approx 14{,}13142143$$

Luego, la temperatura promedio en la tercera semana de Mayo es aproximadamente de 14°C.

8. Actividades

1. *a*) Verificar que $\cos\alpha = 0$ para $\alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$.
   b) Encontrar todos los valores de α para los cuales $\cos\alpha = 0$.
   c) Idem para $\tan\alpha = 0$.
2. Verificar que las definiciones de las FT para un ángulo α no dependen del punto considerado en su lado terminal.
3. Verificar la siguiente tabla de valores de ángulos principales en el segundo cuadrante.

[2] Ver ejercicio 1, en las siguientes actividades

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	-1	0	0

4. El lado final de un ángulo obtuso es la recta que pasa por el punto $(-2, 4)$ y el origen. Calcular las funciones trigonométricas para este ángulo.

5. Determinar, usando la RMD, el dominio de cada una de las FT.

6. Comprobar que para todo valor de x se cumple que $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. ¿Hay otros valores, distintos a 2π, para los cuales también se cumpla la igualdad anterior.

7. Usando calculadora, determinar los valores indicados en la siguiente tabla:

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$80,7°$			
1,3rad			
$28°25'45$”			

8. Estudiar la paridad de cada una de las funciones trigonométricas.

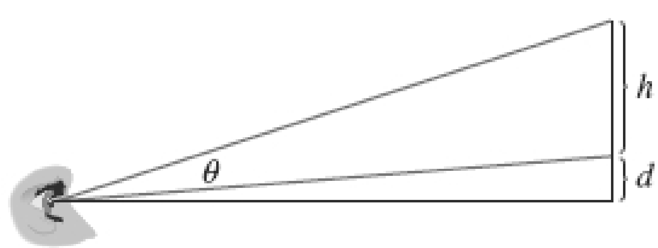
9. Un paciente está convencido que su bienestar emocional varía periódicamente con el tiempo t, de modo que se repite cada 25 días. Es decir, suponiendo que su estado emocional era neutral en el momento de su nacimiento, su nivel emocional t días después será: $E = E(t) = A\sin\left(\frac{2\pi t}{25}\right)$, donde A es el nivel emocional máximo.

   a) Use la calculadora para obtener un gráfico de la función dada y determine cuál será su nivel emocional en su vigésimo cumpleaños si no se consideran los años bisiestos

   b) Este paciente también cree que su bienestar físico sigue un modelo similar, pero con un ciclo que se repite cada 20 días. Si B es el nivel máximo de su bienestar físico, encuentre una fórmula para establecer su estado físico en el momento t, obtenga una gráfica con la calculadora de dicha fórmula y determine el nivel en su vigésimo cumpleaños.

   c) ¿Cuántos días después del vigésimo cumpleaños de Juan coincidirán los niveles máximos de sus ciclos físico y emocional ?

9. Desafío



En una galería de arte un cuadro de h cm de alto se encuentra colgado en una pared de modo que su distancia a la visual de un observador es de d cm(ver figura). Determinar una expresión que corresponda a $\tan\theta$ en términos de la distancia del observador a la pared.