$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Temas: Identidades básicas. Signos de las FT. Fórmulas de reducción.

1. Introducción

En esta sesión se revisan las algunas propiedades generales de las funciones trigonométricas, las cuales serán de frecuente ayuda en diversas situaciones de este curso.

2. Identidades básicas

Las identidades básicas para las FT de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, también son validas para todo ángulo (y por lo tanto para todo número real). Es decir, si α es un ángulo cualquiera, entonces

$$\blacksquare \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\blacksquare \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\blacksquare \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\blacksquare \boxed{(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

$$\blacksquare 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$\blacksquare 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

Nota: Bajar del sitio web del curso, un formulario con un listado más amplio de identidades trigonométricas. *Este formulario se puede usar en las actividades de evaluación de este curso.*

2.1. Ejemplos

1. Verificar la siguiente identidad trigonométrica.

$$2 \csc \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{2 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{2(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha} \\ &= \frac{2}{\sin \alpha} \\ &= 2 \csc \alpha. \end{aligned}$$

2. Comprobar la identidad trigonométrica: $\cot x - 2 \cot 2x = \tan x$

Desarrollo:

$$\begin{aligned}
 \cot x - 2 \cot 2x &= \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} \\
 &= \frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} \\
 &= \frac{1}{\tan x} - \frac{2(1 - \tan^2 x)}{2 \tan x} \\
 &= \frac{1}{\tan x} - \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} \\
 &= \frac{1 - 1 + \tan^2 x}{\tan x} = \frac{\tan^2 x}{\tan x} \\
 &= \tan x
 \end{aligned}$$

2.2. Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante en que está α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

2.2.1. Ejemplos

1. Determinar los signos de

- a) $\sin(4580^\circ)$
 b) $\tan(4580)$

Desarrollo:

- a) $\sin(4580^\circ)$. Al dividir 4560 por 360, se obtiene 12.72222222. Esto quiere decir, que este ángulo da 12 vueltas completas (de 360° cada una) y avanza una fracción igual a .72222222 de 360° , que equivalen a $.66666666 \cdot 360^\circ = 260^\circ$. Por lo tanto, el lado terminal del ángulo 4560° está en el tercer cuadrante, y entonces $\sin(4560^\circ)$ es negativo.
- b) $\tan(4580)$. Al dividir 4560 por 2π se obtiene 728.9296393. Esto significa que este ángulo da 728 vueltas más una fracción igual a .9296393 de 2π , que equivalen a $.9296393 \cdot 2\pi = 5,841095990$. Por lo tanto, el lado terminal del ángulo 2000 se encuentra en el cuarto cuadrante, y entonces $\tan(4580)$ es negativo.

2. Sabiendo que $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ y $\sin \alpha < 0$, determinar los valores de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sec \alpha$, $\csc \alpha$.

Desarrollo.

Como $\tan \alpha > 0$, α pueda estar en el Primer o Tercer cuadrante, además como $\sin \alpha < 0$, α pueda estar en el Tercer o Cuarto cuadrante. Por lo tanto, α está en el Tercer cuadrante.

Ahora bien.

$$\blacksquare \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2.$$

- De la relación $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$, se tiene $\sec \alpha = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. y como α está en el Tercer cuadrante: $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
- $\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.
- De la relación $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$, se tiene $\csc \alpha = \pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 + 2^2} = \pm \sqrt{5}$. y como α está en el Tercer cuadrante. $\csc \alpha = -\sqrt{5}$.
- $\sin \alpha = \frac{1}{\csc \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2.3. Fórmulas de Reducción

Usaremos FT para designar cualquiera de las 6 funciones trigonométricas y coFT su respectiva cofunción (la cofunción del sin es cos, de la tan es cot y de la sec es la csc).

1. $\text{FT}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \pm \text{coFT}(\alpha)$.
2. $\text{FT}(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha) = \pm \text{coFT}(\alpha)$.
3. $\text{FT}(\pi \pm \alpha) = \pm \text{FT}(\alpha)$.
4. $\text{FT}(2\pi \pm \alpha) = \pm \text{FT}(\alpha)$.

Observación: Aquí α es un ángulo agudo y el signo depende del cuadrante donde este situado $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ y viene dado por la tabla de los signos.

2.4. Ejemplo

Usando las fórmulas de reducción, escribir en términos de x las siguientes expresiones:

- a) $\csc(\frac{3\pi}{2} + x)$ b) $\tan(\pi + x)$ c) $-\cos(\frac{\pi}{2} + x)$

Desarrollo:

- a) $\csc(\frac{3\pi}{2} + x) = -\sec(x)$ b) $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ c) $-\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -[-\sin(x)] = \sin(x)$

2.5. Actividades

1. Probar las siguientes identidades trigonométricas.

- a) $\cot \theta + \tan \theta = \cot \theta \sec^2 \theta$.
- b) $\sec^4 \theta - 1 = 2 \tan^2 \theta + \tan^4 \theta$.
- c) $(1 - \cos^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) = \tan^2 \theta$.
- d) $\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \cdot \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cot^2} = \sin^2 \theta \cdot \sec^2 \theta$.
- e) $\frac{\sec \theta + \tan \theta}{\cos \theta - \tan \theta - \sec \theta} = -\csc \theta$.
- f) $(\tan \alpha + \sec \alpha)^2 = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.
- g) $\cos 3\gamma + \sin 2\gamma - \sin 4\gamma = \cos 3\gamma(1 - 2 \sin \gamma)$.
- h) $\cos 3\beta \sin 2\beta - \cos 4\beta \sin \beta = \cos 2\beta \sin \beta$.
- i) $\cos 5\theta \cos 2\theta - \cos 4\theta \cos 3\theta = -\sin 2\theta \sin \theta$.
- j) $\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta - \sin \theta} = 2 \cos \theta + 1$.

$$k) \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A + B}{2}.$$

2. Determinar, sin usar calculadora, el signo de la siguiente expresión:

$$\frac{\sin 2 \cdot \sin 15 \cdot \csc\left(-\frac{\pi}{8}\right)}{\csc\left(-\frac{23\pi}{8}\right) \cdot \tan(-2, 2) \cdot \cot\left(\frac{9\pi}{7}\right)}$$

3. ¿En que cuadrante podría estar un ángulo α si se sabe que $\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$ es negativo?

4. Determinar, de ser posible el signo de la siguiente expresión geométrica:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cdot \csc \alpha \cdot \sec \alpha \cdot \cot \alpha.$$

5. Expresar en términos de α y simplificar la siguiente expresión

$$\frac{\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cot(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}.$$

6. Determinar el valor de las restantes funciones trigonométricas si:

$$a) \tan \alpha = -\frac{1}{3}, \quad \alpha \text{ en el segundo cuadrante.}$$

$$b) \sin \alpha = \frac{5}{13}, \quad \tan \alpha < 0$$

7. Sea α el ángulo que medido desde la parte positiva del eje X con una recta L . Verificar que la pendiente de la recta es igual a $\tan \alpha$.

3. Desafío

Sea θ es el ángulo agudo formado por rectas L_1 y L_2 de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente. Comprobar que

$$\tan(\theta) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$