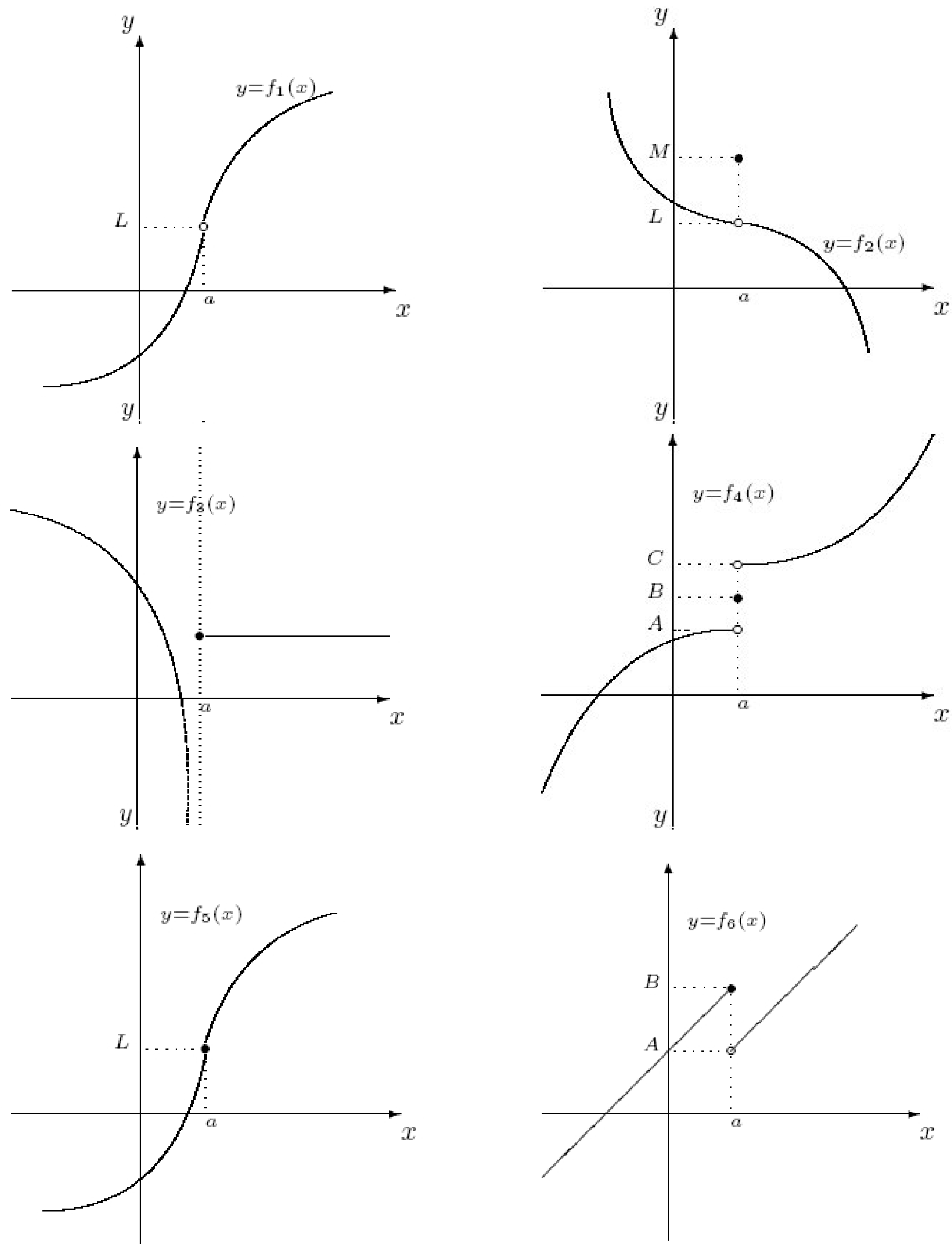
Continuidad

Temas: Introducción. Límites al infinito. Límites infinitos.

1. Introducción

Comparar $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)$ con $f_i(a)$, para $i = 1, ..., 6$.



2. Definición de continuidad en un punto

Se dice que una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1) Existe $f(a)$

2) Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Cuando $y = f(x)$ no es continua en $x = a$, se dice que es *discontinua en* $x = a$.

En general se dice que $y = f(x)$ es *continua en un conjunto* A, cuando es continua en cada punto de A.

3. Actividades

Estudiar la continuidad en $x = 3$ de las funciones:

a) $y = f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ b) $y = g(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

4. Tipos de Discontinuidad

- *De Primera Especie.* Los límites laterales de $f(x)$ en el punto a existen. Hay dos casos:
  - Los límites laterales en a son iguales, pero distintos a $f(a)$. Se llama discontinuidad *reparable.*
  - Los límites laterales en a son distintos. Se llama discontinuidad de *salto* (El salto es igual al valor absoluto de la diferencia de los límites laterales).
- *De Segunda Especie.* Al menos uno de los límites laterales en a *no existe.*

4.1. Ejemplo

Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ en $\mathbb{R}$.

Desarrollo: El numerador y el denominador son funciones continuas. Luego los únicos puntos de discontinuidad posibles son aquellos en que se anula el denominador.
Ahora bien, como $x^3 + 7x - 8 = (x-1)(x^2+x+8)$, el único punto de discontinuidad es el 1, pues no existe $f(1)$.
Entonces factorizando por $(x-1)$ y luego simplificando:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3+7x-8} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+8)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Como el límite precedente existe, se tiene que la discontinuidad en $x = 1$ es reparable.

5. Propiedades de la Funciones Continuas

5.1. Las funciones básicas son continuas.

Son continuas en su dominio las funciones: lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

5.2. Álgebra de funciones continuas.

Si f y g son continuas en un conjunto A, también lo son $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, con $g(a)\neq 0$.

5.3. La compuesta de funciones continuas es una función continua.

Si $g(t)$ es continua en $t=a$ y $f(x)$ es continua en $b=g(a)$ entonces $f\circ g$ es continua en $t=a$.

5.4. Límite de una función compuesta.

Si $f(x)$ es continua en a entonces $\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x)=f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$.

5.5. Teorema de Weierstrass.

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, es *acotada*, es decir, si f es continua en $[a,b]$, entonces existe $k\in\mathbb{R}^+$, tal que $|f(x)|\leq k$, para todo $x\in[a,b]$.

Carlos Weierstrass. (1815-1897) matemático alemán.
Suele ser citado como el *padre del análisis moderno*.

5.6. Teorema de acotamiento.

Una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ *alcanza* sus extremos, es decir existen puntos x_1,x_2 tales que:

$$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)\quad \text{para todo } x\in[a,b].$$

Bernard Bolzano (Praga, 1781-1848).
Matemático, lógico, filósofo y teólogo checo.

5.7. Teorema del Valor Intermedio (TVI).

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(a)\neq f(b)$ y N se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=N$.

5.8. Teorema de Bolzano (Caso particular del TVI).

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(a),f(b)$ son de signos opuestos entonces existe $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=0$.
Aplicación: Calculo aproximado de raíces irracionales.

6. Ejemplo

Verificar que la ecuación $x^3 - x - 3 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Aproximar esta raíz con 2 decimales exactos.

Desarrollo: Como $f(x) = x^3 - x - 3$ es continua y $f(1)$ con $f(2)$ tienen signos distintos, entonces $f(x) = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2.

Ahora bien, luego de la siguiente tabla de valores

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	-3	-2.769	-2.472	-2.103	-1.656	-1.125	-0.504	0.213	1.032	1.959	3

se tiene que el primer decimal exacto de la raíz es 6. ¿Por qué?.

Y por inspección de la siguiente tabla

x	1.6	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.66	1.67	1.68	1.69	1.7
$f(x)$	-0.504	-0.437	-0.368	-0.299	-0.229	-0.158	-0.086	-0.012	0.062	0.137	0.213

el segundo decimal exacto es 7. Por lo tanto, la raíz buscada, con dos decimales exactos, es 1.67.

7. Actividades

1. Hacer el esbozo de una función, con dominio $\mathbb{R}$, que cumpla cada una de las siguientes condiciones: 1) Ser continua en $x = 1$. 2) Una discontinuidad reparable en $x = 0$. 3) Una discontinuidad de salto en $x = 3$. 4) Una discontinuidad de segunda especie en $x = 4$. 5) No acotada. 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5$.

2. Estudiar la continuidad de $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones. Cuando existan puntos de discontinuidad, clasificarlos.

   a) $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $f_2(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $f_3(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

   d) $f_4(x) = e^x \sin(2x-1)$ e) $f_5(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+x+5}$ f) $f_6(x) = 1 + \tan(2x)$

   g) $f_7(x) = x - \text{ent}(x)$ h) $f_8(x) = \frac{x}{|x|}$ i) $f_9(x) =$

   j) $f_{10}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ k) $f_{11}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{7x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ l) $f_{12}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{7x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. Claramente la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ es discontinua en $x = 1$. ¿Cómo habría que definir $f(1)$, para que esta nueva función sea continua en todo $\mathbb{R}$?.

4. Para la función $f(x) = \dfrac{x^4+4x^3+x^2-6x}{x^4-7x^2-6x}$, encontrar valores de x, en caso de existir, para los cuales esta función tenga discontinuidades reparables e irreparables.

5. Verificar que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene una raíz entre 1 y 2. Determinarla con 2 decimales exactos.

6. Verificar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene una raíz positiva menor que 1. Determinarla con 2 decimales exactos.

7. Comprobar que la ecuación $\frac{a}{x-\lambda_1} + \frac{b}{x-\lambda_2} + \frac{c}{x-\lambda_3} = 0$, donde a, b y c son positivos y $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tiene 2 raíces reales comprendidas en los intervalos $]\lambda_1, \lambda_2[$ y $]\lambda_2, \lambda_3[$.

8. Desafío

Un auto viaja de Talca a Curicó, que están a 60km, en una hora pero no fue a velocidad constante. *Demostrar que en algún instante el auto fue a exactamente 60km/h.*