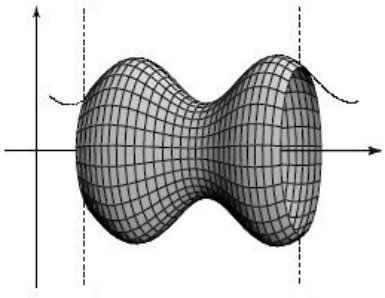
Sesión 15

Cálculo de volúmenes I: Método de los discos

Temas	Capacidades
✓ Método de los discos para calcular volúmenes de sólidos de revolución.	▷ Conocer y aplicar el método de los discos para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

U de Talca

15.1 Introducción



Sólido de revolución

En esta sesión se revisa otra aplicación de la integral definida: cálculo de volúmenes de sólidos de revolución. Para este efecto existen esencialmente dos métodos: el método de los discos y el de los cascarones cilíndricos. En esta sesión se revisa el primero de ellos.

15.2 Definición de Sólido de revolución

Sea $y = f(x)$ una función continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, $(f(x) \geqslant 0)$ y R la región del plano delimitada por:

- **Arriba**: Gráfico de la función $y = f(x)$.
- **Abajo**: Eje X.
- **Izquierda**: La recta $x = a$.
- **Derecha**: La recta $x = b$

se denomina *sólido de revolución* al sólido S (en el espacio), generado al girar la región R en torno a una recta (eje de rotación) *exterior* a la región R. Normalmente se considera a los ejes coordenados como ejes de rotación.

Los siguientes gráficos ilustran la definición de sólido de revolución, considerando al eje X como eje de rotación:

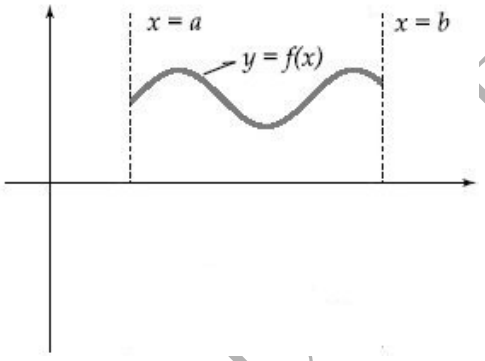


Gráfico de $y = f(x)$

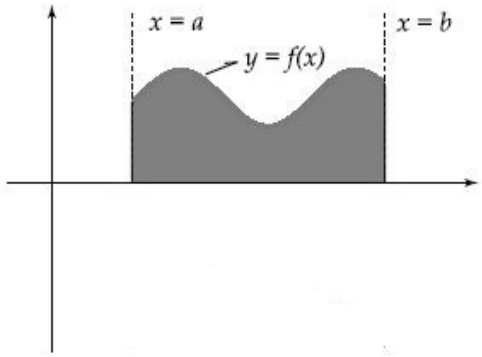
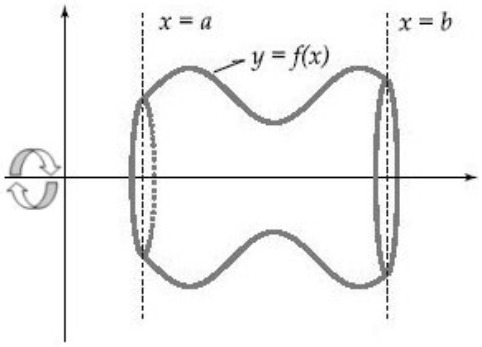
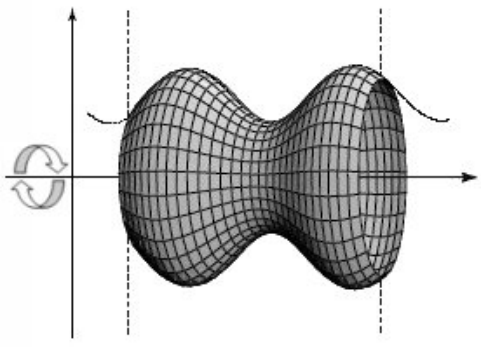


Gráfico de la región R

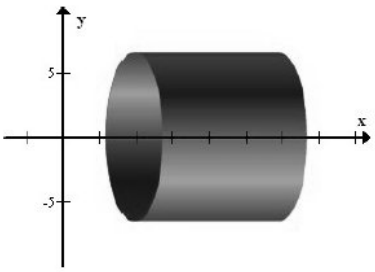


Un esbozo del sólido de revolución S

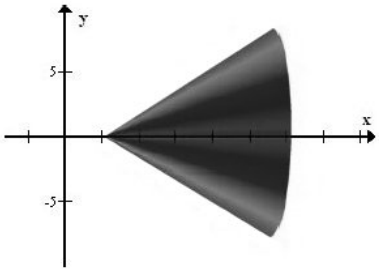


Otro esbozo del sólido de revolución S

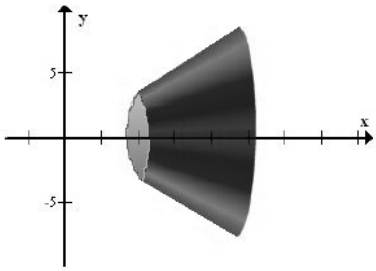
Ejemplo 15.1. Los sólidos de revolución obtenidos al girar en torno al eje X un segmento horizontal, un segmento oblicuo y una semi-circunferencia, corresponden a los sólidos cilindro, cono o tronco de cono y una esfera, respectivamente



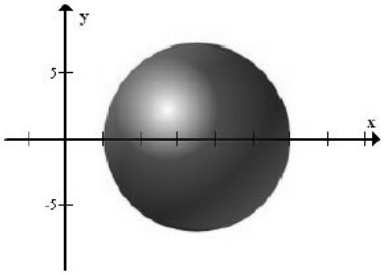
Cilindro



Cono



Cono truncado



Esfera

Teorema 15.1. (Método de los discos) *El volumen del sólido de revolución S, generado al girar el torno al eje X la región R, delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ no negativa y continua, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, viene dado por*

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

Demostración*:* Supongamos que el gráfico de $y = f(x)$ es:

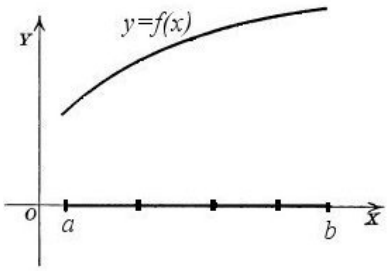
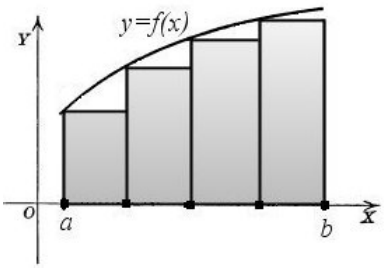


Gráfico de $y = f(x)$

Se procede de manera análoga a como se hizo al buscar el área bajo una curva:

1) Dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y elegir un punto arbitrario x_i en cada uno de ellos.

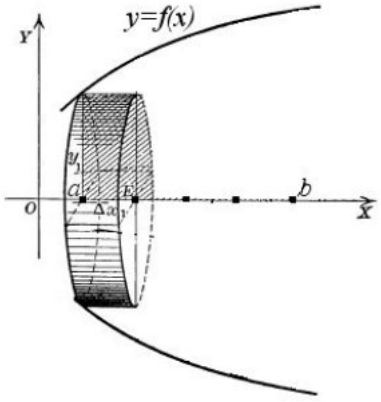
2) Formar los mismos rectángulos considerados en el problema del área.



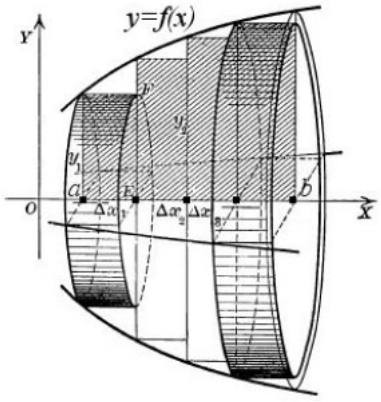
Ejemplo de partición y rectángulos para $n = 4$

3) Girar en torno al eje X cada uno de estos n rectángulos. Naturalmente, el volumen del sólido obtenido V_n es una aproximación del volumen de S.

Sea R_i el volumen del cilindro obtenido al girar el i-ésimo rectángulo. Es claro que el volumen de R_i es $\pi f(x_i)^2 \Delta x$. Este valor recibe, en general, el nombre de *elemento de volumen.*



Primer cilindro



Primer y último cilindro

Por lo tanto, el volumen V_n viene dado por:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta x$$

4) Finalmente, definiendo $vol(S) = \lim_{n\to\infty} V_n$, se tiene:

$$vol(S) = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$ ■

Nota 15.1. En general, para calcular el volumen de un sólido de revolución, se calcula la integral del elemento de volumen correspondiente, entre límites apropiados de integración.

Ejemplo 15.2. *Sea R la región del plano delimitada por los gráficos de*

$$y = f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad x = 4 \quad \text{y el eje } X.$$

determinar el volumen del sólido de revolución S, obtenido al girar la región R en torno al eje X.

Solución.

El gráfico de R y del sólido correspondiente S, son

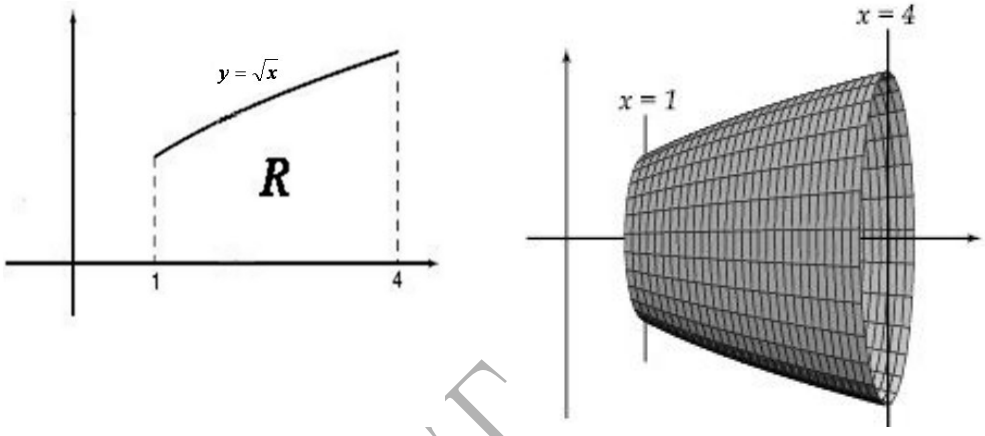
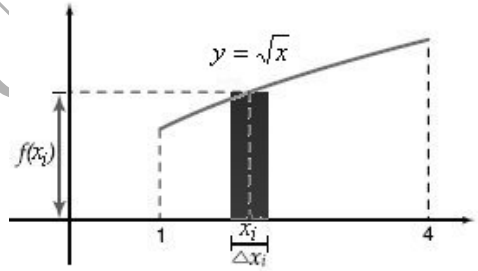


Gráfico de R *Gráfico de S*

El elemento de volumen en este caso, tal como se indica en la siguiente figura, es

$$dV = \pi f(x_i)^2 \Delta x_i = \pi(\sqrt{x}_i)^2 \Delta x_i = \pi x_i \Delta x_i$$



Rectángulo que genera el elemento de volumen

Luego,

$$vol(S) = \pi \int_1^4 x\, dx = \frac{15\pi}{2} (u.\ de\ l.)^3$$

Ejercicio 15.1. *Verificar que el volumen de una esfera de radio r es igual $\frac{4}{3}\pi r^3$.*

Ejemplo 15.3. *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X, la superficie R, comprendida entre las parábolas con ecuaciones $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*

Solución:

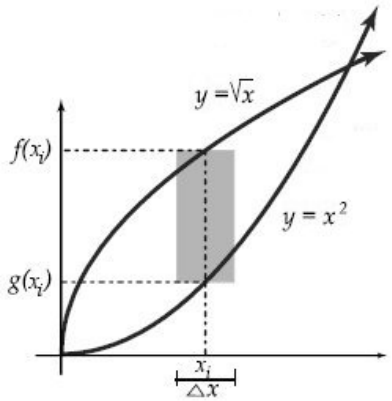


Gráfico de R

de acuerdo al gráfico precedente, el elemento de volumen para este ejercicio es $\pi((\sqrt{x_i})^2 - (x_i^2)^2)\Delta x$. Luego,

$$vol(S) = \pi \int_0^1 (x - x^4)\, dx = \frac{3\pi}{10} \approx 0.94(u.\ de\ l.)^3$$

Nota 15.2. Haciendo un desarrollo similar al Teorema 8.1 se tiene que:

Teorema 15.2. *El volumen del sólido S generado al girar en torno al eje Y la región R delimitada por la gráfica de $x = g(y)$, las rectas $y = c$ e $y = d$ $(c < d)$, y el eje Y, viene dado por:*

$$V = \pi \int_c^d g(y)^2\, dy = \pi \int_c^d x^2\, dy$$

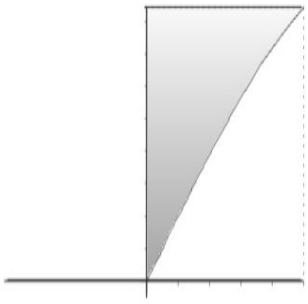
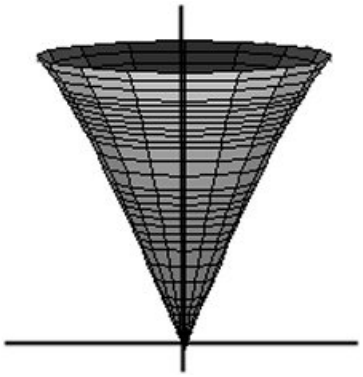


Gráfico de R

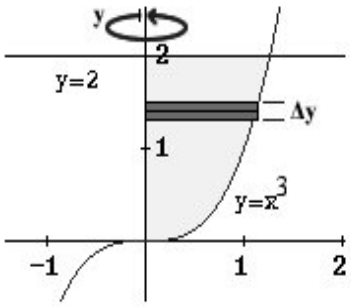


Sólido generado S

Ejemplo 15.4. *La región R acotada por la curva $y = x^3$, la recta $y = 2$ el eje Y, rota alrededor del eje Y. Encontrar el volumen del sólido S obtenido.*

Solución:

U de Talca



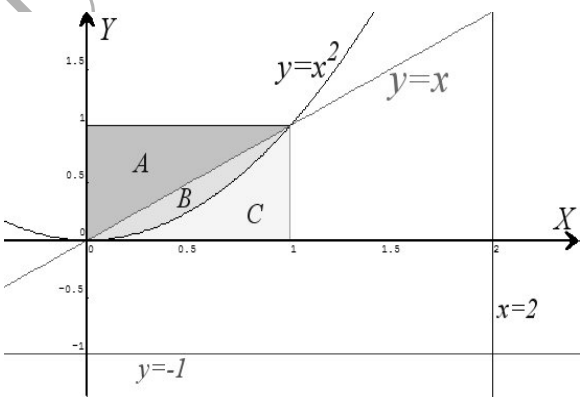
Región R

$$vol(S) = \pi \int_0^2 y^{\frac{2}{3}}\, dy = \pi \frac{3\sqrt[3]{32}}{5} \approx 5.98(u.\ de\ l.)^3$$

15.3 Autoevaluación

En el siguiente dibujo se encuentran los gráficos de las funciones $y = x^2$ e $y = x$. También se entregan los gráficos de las rectas: $y = -1$ y $x = 2$. Considerar las siguientes regiones:

Región A: Limitada superiormente por la recta $y = 1$, inferiormente por $y = x$ y a la izquierda por el eje Y.
Región B: Limitada superiormente por la recta $y = x$ e inferiormente por $y = x^2$.
Región C: Limitada superiormente por $y = x^2$, inferiormente por el eje X y a la derecha por la recta $x = 1$.



Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región:

1) A alrededor del eje X.
2) A alrededor del eje Y.
3) A alrededor de la recta $x = 2$.
4) A alrededor de la recta $y = -1$.
5) B alrededor del eje X.
6) B alrededor del eje Y.

ty de Talca

7) B alrededor de la recta $x = 2$.
8) B alrededor de la recta $y = -1$.
9) C alrededor del eje X.
10) C alrededor del eje Y.
11) C alrededor de la recta $x = 2$.
12) C alrededor de la recta $y = -1$.

Soluciones:

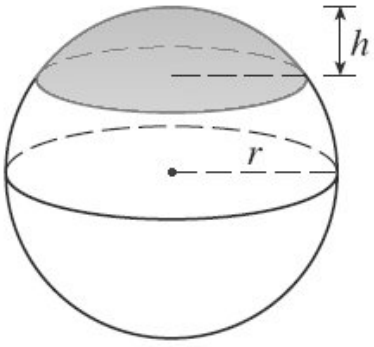
1) $V_1 = \pi \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}\pi$
2) $V_2 = \pi \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3}\pi$
3) $V_3 = \pi \int_0^1 (2^2 - (2 - y)^2)\, dy = \frac{5}{3}\pi$
4) $V_4 = \pi \int_0^1 (2^2 - (x + 1)^2)\, dx = \frac{5}{3}\pi$
5) $V_5 = \pi \int_0^1 (x^2 - (x^2)^2)\, dx = \frac{2}{15}\pi$
6) $V_6 = \pi \int_0^1 (y - y^2)\, dy = \frac{1}{6}\pi$
7) $V_7 = \pi \int_0^1 ((2 - y)^2 - (2 - \sqrt{y})^2)\, dy = \frac{\pi}{2}$
8) $V_8 = \pi \int_0^1 ((x + 1)^2 - (x^2 + 1)^2)\, dx = \frac{7\pi}{15}$
9) $V_9 = \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx = \frac{1}{5}\pi$
10) $V_{10} = \pi \int_0^1 (1 - y)\, dx = \frac{1}{2}\pi$
11) $V_{11} = \pi \int_0^1 ((2 - \sqrt{y})^2 - 1)\, dy = \frac{5}{6}\pi$
12) $V_{12} = \pi \int_0^1 ((x^2 + 1)^2 - 1)\, dx = \frac{13}{15}\pi$

Nota 15.3. Observar que

- $V_1 + V_5 + V_9 = \pi$. ¿Porqué?.
- $V_2 + V_6 + V_{10} = \pi$. ¿Porqué?.
- $V_3 + V_7 + V_{11} = 3\pi$. ¿Porqué?.
- $V_4 + V_8 + V_{12} = 3\pi$. ¿Porqué?.

15.4 Desafío

Calcular, usando integrales, el volumen del casquete esférico indicado en la siguiente figura:



U de Talca