Sesión 16

Cálculo de volúmenes II: Método de los casquetes cilíndricos

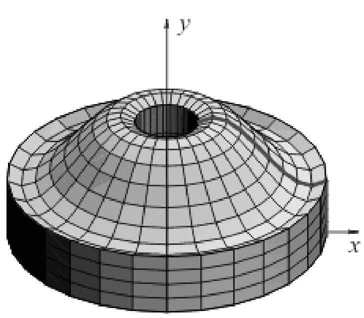
Temas

✓ Método de los casquetes cilíndricos para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

Capacidades

▷ Conocer y aplicar el método de los casquetes esféricos para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

16.1 Introducción



Sólido al girar en torno al eje Y

En muchas ocasiones, al girar en torno al eje Y, una región del plano, el cálculo del volumen del sólido engendrado resulta bastante complicado. Tal es el caso, por ejemplo, si la función en cuestión es $y = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$. ¿Por qué?. Para estas situaciones, en esta sesión se revisa un método que simplifica considerablemente la resolución del problema plantado. Este método se denomina: *método de los casquetes cilíndricos*.

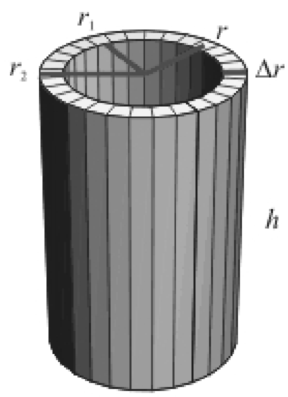
Nota 16.1 La mayor parte de las ilustraciones y ejemplos de esta sesión se han tomado de *Volúmenes por casquetes cilíndricos*, del profesor Aquiles Páramo Fonseca. Web: http://temasmatematicos.uniandes.edu.co/Casquetes_cilindricos/

Nota 16.2 Antes de abordar el método de los casquetes cilíndricos, se ve el siguiente resultado previo.

Lema 16.1 *El volumen, V_{cc}, de un casquete cilíndrico de altura h, de radio interior r_1 y de radio exterior es r_2, viene dado por*

$$V_{cc} = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1)h$$

Demostración*:*

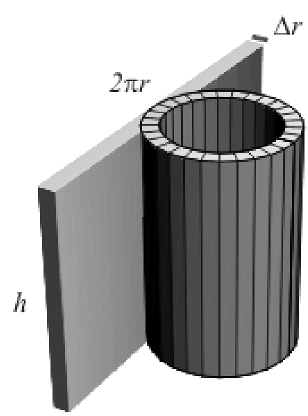


Casquete cilíndrico

Restando al volumen V_2 del cilindro exterior el volumen V_1 del cilindro interior, se tiene que:

$$\begin{aligned} V_{cc} &= V_2 - V_1 \\ &= \pi {r_2}^2 h - \pi {r_1}^2 h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)(r_2 - r_1)h \end{aligned}$$

Nota 16.3 Designado $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ y $\Delta r = r_2 - r_1$, se puede escribir $V_{cc} = 2\pi r h \Delta r$. Esta expresión, es más fácil de recordar, si se piensa en el casquete esférico *abriéndose* para formar una caja rectangular (paralelepípedo) de grosor Δr.



Casquete cilíndrico equivalente a una caja rectangular

Teorema 16.1 (Método de los casquetes cilíndricos) *El volumen, V, del sólido de revolución S generado al girar en torno al eje Y, la región R delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ no negativa y continua, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, viene dado por*

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \tag{16.1}$$

Demostración:
Supongamos que el gráfico de R y el correspondiente sólido de revolución S, al girar R, en torno al eje Y son:

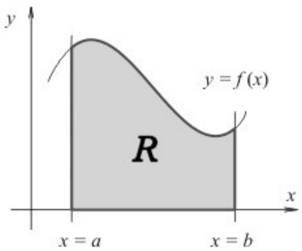


Gráfico de R

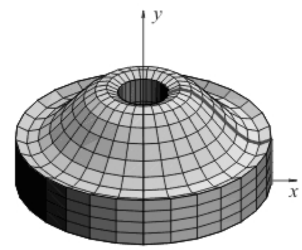
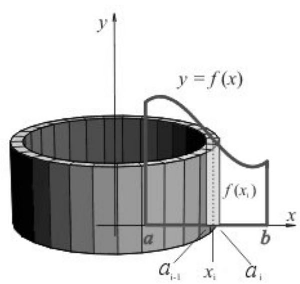


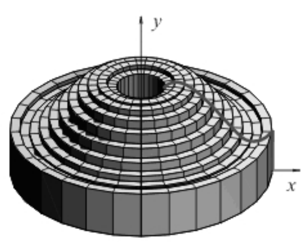
Gráfico del sólido S

Siguiendo el mismo procedimiento de la demostración del Teorema 14.1, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Se elige en cada subintervalo el punto del medio x_i. Cada rectángulo de base Δx y altura $f(x_i)$ se gira en torno al eje Y, formando cada uno de ellos un casquete cilíndrico. El volumen del i-ésimo casquete cilíndrico, luego del lema precedente, es $V_i = 2\pi x_i f(x_i)\Delta x$, luego

$$vol(S) \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x$$



V_i: casquete esférico al girar el i-ésimo rectángulo en torno al eje Y



V_n: casquetes esféricos al girar todos los rectángulos torno al eje Y $(n = 11)$

Por lo tanto,

$$vol(S) = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \qquad \blacksquare$$

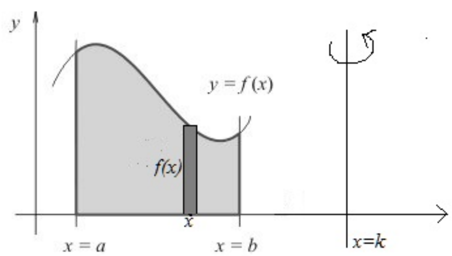
Nota 16.4

1) Una manera de recordar mejor el resultado (16.1) es:

$$V = 2\pi \int_a^b \underbrace{\textit{dist. de } x_i \textit{ al eje de rotación}}_{x} \cdot \underbrace{\textit{altura del rectángulo i-esimo}}_{f(x)} \, dx$$

2) Luego, si se hace girar la región R en torno a la recta verticar $x = k$ (que se encuentra, por ejemplo, a la derecha de b), el volumen es

$$V = 2\pi \int_a^b (k - x) f(x) \, dx \tag{16.2}$$



3) En caso que la rotación sea en torno al eje Y, la fórmula del volumen del sólido de revolución obtenido, por el método de los casquetes cilíndricos, es

$$V = 2\pi \int_c^d y \, g(y) \, dy \tag{16.3}$$

Ejemplo 16.1 *Calcular el volumen del sólido de revolución S que se genera al hacer girar alrededor del eje Y la región R comprendida, en el primer cuadrante, entre los gráficos de $y = f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ y la vertical $x = 3$.*
Solución:

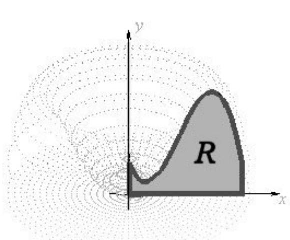


Gráfico de la región R

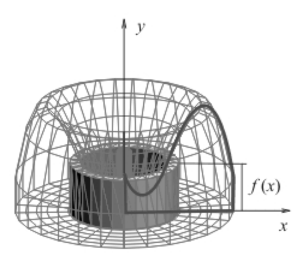


Gráfico del sólido S

Luego,

$$vol(S) = 2\pi \int_0^3 x(-x^3 + 4x^2 - 3x + 1)dx = \frac{99\pi}{5} \approx 62.2 \text{ (u. de long.)}^3$$

Ejemplo 16.2 *Hallar el volumen del sólido de revolución S que se genera al girar, alrededor del eje Y, la región R acotada por los gráficos de $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $y = g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y por las rectas verticales $x = 1$ y $x = 3$.*

Solución:

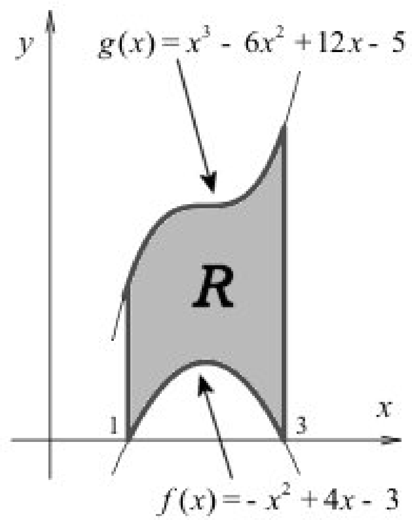


Gráfico de la región R

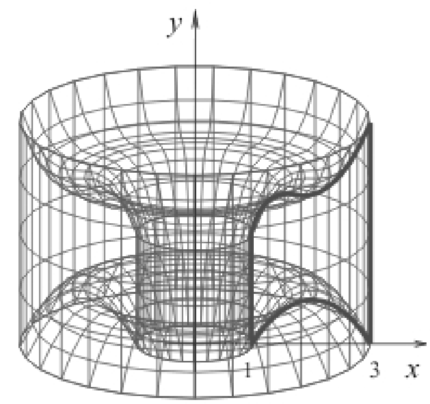


Gráfico del sólido S

Ahora bien, el volumen pedido viene dado por:

$$\begin{aligned} vol(S) &= 2\pi \int_1^3 x(g(x) - f(x))dx \\ &= 2\pi \int_1^3 (x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 2x)dx = \frac{292\pi}{15} \approx 61.16 \text{ (u. de long.)}^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 16.3 *Calcular el volumen del sólido S que se genera al girar alrededor de la recta vertical $x = 1$, la región R delimitada por el eje X, las rectas $x = 2$, $x = 3$, y el gráfico de $y = f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$.*

Solución:

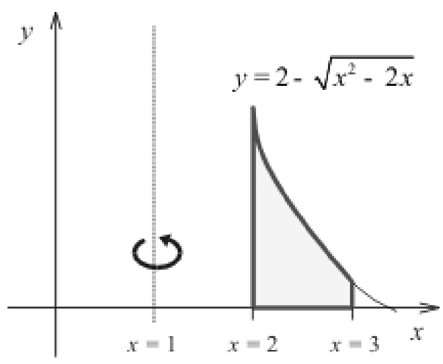


Gráfico de la región R

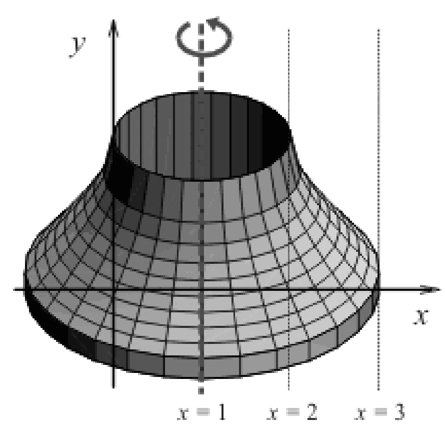
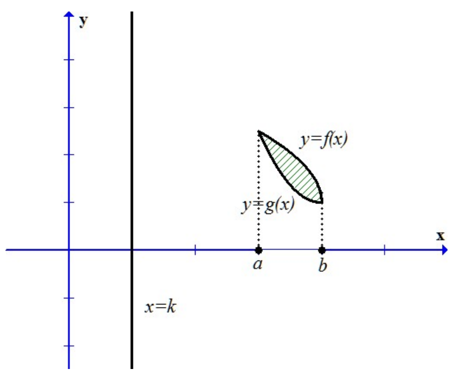


Gráfico del sólido S

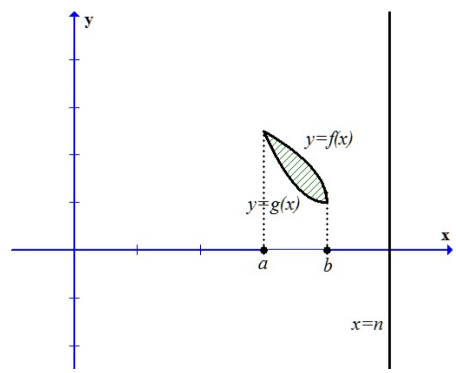
En la situación planteada el radio medio de un casquete cilíndrico genérico, que tiene como altura $f(x)$, es $x-1$ y no x como en los casos anteriores, puesto que el casquete cilíndrico tiene como eje de rotación la recta vertical $x=1$. Luego, el volumen del sólido S es:

$$vol(S) = 2\pi \int_2^3 (x-1)(2-\sqrt{x^2-2x})dx = (6-2\sqrt{3})\pi \approx 7.967 \text{ (u. de long.)}^3$$

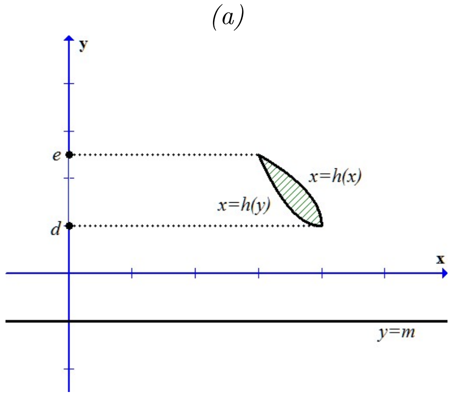
Ejercicio 16.1 Presentar la fórmulas de los volumenes de los sólidos de revolución obtenidos con el método de esta sesión, al girar la región en torno a la recta indicada:



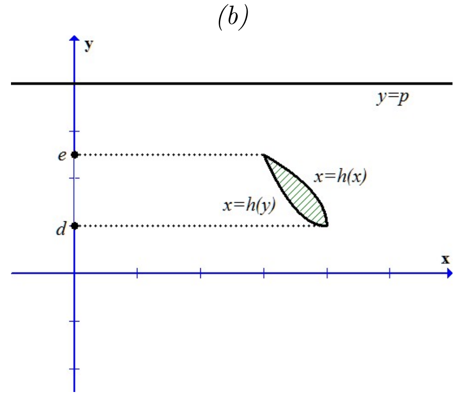
(a)



(b)



(c)



(d)

Ejercicio 16.2 *Calcular, de ser posible, usando el método de los casquetes cilíndricos, los volúmenes de los sólidos de revolución, considerados en las actividades de autoevaluación de la sesión precedente.*

Soluciones:*

* Un aporte de Mauricio Echeverria Candia (2012-2)

1) $V_1 = 2\pi \int_0^1 (y)(y)\, dy = \frac{2}{3}\pi$

2) $V_2 = 2\pi \int_0^1 (x)(1-x)\, dx = \frac{1}{3}\pi$

3) $V_3 = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1-x)\, dy = \frac{5}{3}\pi$

4) $V_4 = 2\pi \int_0^1 (y+1)(y)\, dy = \frac{5}{3}\pi$

5) $V_5 = 2\pi \int_0^1 (y)(\sqrt{y}-y)\, dy = \frac{2}{15}\pi$

6) $V_6 = 2\pi \int_0^1 (x)(x-x^2)\, dx = \frac{1}{6}\pi$

7) $V_7 = 2\pi \int_0^1 (2-x)(x-x^2)\, dx = \frac{\pi}{2}$

8) $V_8 = 2\pi \int_0^1 (y+1)(\sqrt{y}-y)\, dy = \frac{7\pi}{15}$

9) $V_9 = 2\pi \int_0^1 (y)(1-\sqrt{y})\, dy = \frac{1}{5}\pi$

10) $V_{10} = 2\pi \int_0^1 (x)(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\pi$

11) $V_{11} = 2\pi \int_0^1 ((2-x)(x^2)\, dx = \frac{5}{6}\pi$

12) $V_{12} = 2\pi \int_0^1 (y+1)(1-\sqrt{y})\, dx = \frac{13}{15}\pi$

16.2 Autoevaluación

Usar el método de los casquetes esféricos para calcular el volumen de los sólidos generados al girar en torno al eje Y cada una de las siguientes regiones del plano:

1) R_1: *Región en el primer cuadrante acotada por el gráfico de $y = x\sin x$ y la recta $x = \pi$.*

2) R_2: *Región en el primer cuadrante acotada por los gráficos de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.*

3) R_3: *Región en el primer cuadrante acotada por los gráficos de $y = \frac{1}{x^2+3x+2}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.*

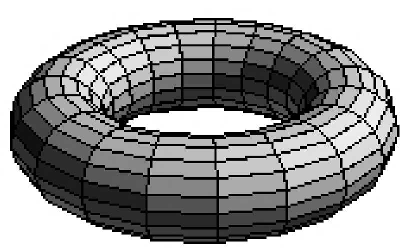
Soluciones.(1) $36.88(\text{u. de long.})^3$ (2) $4.623(\text{u. de long.})^3$ (3) $0.74(\text{u. de long.})^3$

16.3 Desafío

Calcular el volumen del sólido generado al girar *la región de la circunferencia*

$$(x-a)^2 + y^2 = r^2,$$

con $0 < a < b$, en torno al eje Y. Dicho sólido recibe el nombre de *toro*.



Toro