

Sesión 5

Método de integración por fracciones parciales

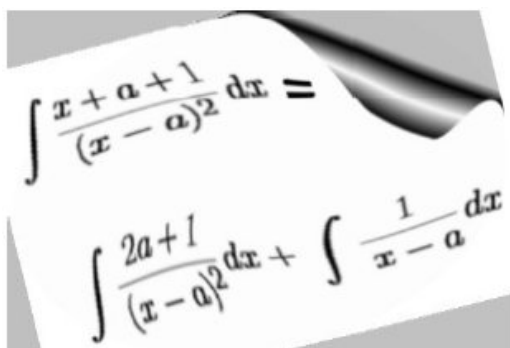
Temas

- ✓ Fracciones parciales.
- ✓ Método de integración por fracciones parciales.

Capacidades

- ▷ Descomponer una fracción en suma de fracciones parciales.
- ▷ Conocer y comprender el método de integración por fracciones parciales.
- ▷ Calcular integrales indefinidas que se pueden obtener por fracciones parciales.

5.1 Introducción



The image shows a piece of paper with two mathematical formulas. The top formula is $\int \frac{x+a+1}{(x-a)^2} dx =$. The bottom formula is $\int \frac{2a+1}{(x-a)^2} dx + \int \frac{1}{x-a} dx$.

En esta sesión se tratará un método para calcular integrales de ciertas funciones racionales^a, llamado *método de integración por fracciones parciales*.

La técnica que se usa es descomponer una fracción en fracciones más simples, llamadas fracciones parciales, esta técnica fue desarrollada por el matemático suizo John Bernoulli (1667-1748).

^a Una función se llama racional si ella es el cociente de 2 polinomios con coeficientes reales.

Como se señaló anteriormente, en esta sesión se trabajará con integrales de funciones racionales. Estas integrales son de la forma:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales.

Por ejemplo:

$$\int \frac{x-4}{x^3+x^2-2x} dx \quad \int \frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x} dx \quad \int \frac{1}{x^3-1} dx \quad \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$$

Nota 5.1. Algunas integrales de funciones racionales no se pueden calcular con los métodos tratados anteriormente.

Para calcular integrales de ciertas funciones racionales, se usa el *método de las fracciones parciales*, que consiste en descomponer previamente la fracción en suma de *fracciones parciales*, y luego calcular la integral de cada sumando aplicando métodos ya tratados.

5.2 Descomposición en suma de fracciones parciales

5.2.1 Fracciones simples

Se llaman *fracciones simples*, aquellas que presentan una de las siguientes formas:

$$(1) \quad \frac{A}{(ax+b)^n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2) \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ b^2-4ac < 0 \end{matrix}$$

En particular, son fracciones simples:

$$(a) \quad \frac{7}{x-2} \quad (b) \quad \frac{2x+1}{x^2+2x+3} \quad (c) \quad \frac{2}{(2x-1)^3} \quad (d) \quad \frac{2}{(x^2+2)^2}$$

Nota 5.2. Las integrales de las fracciones simples se pueden determinar usando las técnicas ya tratadas.

Por ejemplo: $\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln |ax+b| + C$

5.2.2 Descomposición en fracciones parciales

A continuación se describirá el proceso para descomponer una fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones parciales.

Caso 1. Cuando $\text{grado}(p(x)) < \text{grado}(q(x))$, se procede como sigue:

- Factorizar el denominador $q(x)$ sobre los reales.

Los factores de $q(x)$ pueden ser:

Factores lineales repetidos n veces: $(ax + b)^n$, $n \in \mathbb{N}$

o

Factores cuadráticos repetidos m veces: $(ax^2 + bx + c)^m$, $m \in \mathbb{N}$
donde $b^2 - 4ac < 0$

- Por cada factor de $q(x)$, de la forma $(ax + b)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma de n fracciones simples del tipo (1):

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

- Por cada factor de $q(x)$, de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$, la descomposición en fracciones parciales debe incluir la suma de m fracciones simples del tipo (2):

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}$$

Caso 2. Cuando $\text{grado}(p(x)) \geq \text{grado}(q(x))$, se procede como sigue:

- Dividir el polinomio $p(x)$ por el polinomio $q(x)$, obteniendo un cociente $c(x)$ y un resto $r(x)$:

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

donde $r(x) = 0$ o $\text{grado}(r(x)) < \text{grado}(q(x))$. Luego:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

- Si $r(x) \neq 0$, entonces, se aplica el proceso descrito en el Caso 1, a la fracción $\frac{r(x)}{q(x)}$.



Ejemplo 5.1. Factores lineales diferentes

Descomponer la fracción $\frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$ en suma de fracciones parciales.

Solución:

a) Factorizar el denominador: $x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2)$

b) Por cada factor lineal se incluye en la suma una fracción simple:

$$\frac{x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

donde A , B y C deben calcularse.

c) Determinación de A , B y C :

- $\frac{x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$
- Luego: $x-4 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$
- Como la igualdad anterior es válida para todo $x \in \mathbb{R}$, se sustituye x por valores particulares, con el propósito de determinar A , B y C :
 Para $x = 0$: $0-4 = A(-1)(2) + B(0) + C(0)$, de donde $A = 2$
 Para $x = 1$: $1-4 = A(0) + B(3) + C(0)$, de donde $B = -1$
 Para $x = -2$: $-2-4 = A(0) + B(0) + C(6)$, de donde $C = -1$

d) Luego: $\frac{x-4}{x^3+x^2-2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$

Ejemplo 5.2. Factores lineales repetidos

Descomponer la fracción $\frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x}$ en suma de fracciones parciales.

Solución:

- a) Factorizar el denominador: $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$
- b) Descomponer la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

c) Determinación de A , B y C :

- $\frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$
- Luego: $6x^2-8x+5 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$
- Para $x = 0$: $5 = A(0-1)^2 + B(0) + C(0)$, de donde $A = 5$
 Para $x = 1$: $3A(0) + B(0) + C$, de donde $C = 3$
 Para $x = 2$: $13 = A(2-1)^2 + B \cdot 2(2-1) + C \cdot 2$
 sustituyendo $A = 5$, $C = 3$, se obtiene $B = 1$

d) Luego:
$$\frac{6x^2 - 8x + 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{5}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$



Ejemplo 5.3. Factores cuadráticos

Descomponer la fracción $\frac{1}{x^3 - 1}$ en suma de fracciones parciales.

Solución:

a) Factorizar el denominador: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Notar que $x^2 + x + 1$ no tiene raíces reales.

b) Descomponer la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

donde A , B y C deben calcularse.

c) Determinación de A , B y C :

- $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$
- Luego: $1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$
- Para $x = 1$: $1 = A(3) + (B + C)(0)$, de donde $A = \frac{1}{3}$
- Para $x = 0$: $1 = A(1) + (C)(-1)$, de donde $C = -\frac{2}{3}$
- Para $x = 2$: $1 = A(7) + (2B + C)(1)$
- $1 = \frac{1}{3}(7) + (2B - \frac{2}{3})(1)$, obteniendo $B = -\frac{1}{3}$

d) Luego:
$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{3(x - 1)} - \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)}$$

5.3 Ejemplos de integrales de funciones racionales



Ejemplo 5.4. Calcular $\int \frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} dx$.

Solución:

Descomponer $\frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$ en suma de fracciones parciales. Del ejemplo 5.1 se tiene:

$$\frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego: } \int \frac{x-4}{x^3+x^2-2x} dx &= \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} \\
 &= 2 \ln |x| - \ln |x-1| - \ln |x+2| + C \\
 &= \ln \left| \frac{x^2}{x^2+x-2} \right| + C = \ln \frac{Kx^2}{|x^2+x-2|}
 \end{aligned}$$

 **Ejemplo 5.5.** Calcular $\int \frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x} dx$.

Solución:

Descomponer $\frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x}$ en suma de fracciones parciales. Del ejemplo 5.2 se tiene:

$$\frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x} = \frac{5}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego: } \int \frac{6x^2-8x+5}{x^3-2x^2+x} dx &= \int \frac{5}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx \\
 &= 5 \ln |x| + \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + C
 \end{aligned}$$

 **Ejemplo 5.6.** Calcular $\int \frac{1}{x^3-1} dx$.

Solución:

Del ejemplo 5.3 se tiene: $\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}$. Luego:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^3-1} dx &= \int \frac{1}{3(x-1)} dx - \int \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{3} \int \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln |x^2+x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx \\
 &= \ln \frac{|x-1|^{1/3}}{|x^2+x+1|^{1/6}} - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

 **Ejemplo 5.7.** Calcular $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$.

Solución:

- Como $\text{grado}(\text{numerador}) \geq \text{grado}(\text{denominador})$, se debe dividir primero:

$$\begin{array}{rcc} x^2 + 3x - 4 = & 1 \cdot (x^2 - 2x - 8) & + (5x + 4) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \text{cuociente} & \text{resto} \end{array}$$

de donde: $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} = 1 + \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$

- Luego: $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx = \int 1 dx + \int \frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} dx$

- Como $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$, la fracción $\frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$ se descompone:

$$\frac{5x + 4}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4}{x - 4} + \frac{1}{x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx &= \int 1 dx + \left(\int \frac{4}{x - 4} dx + \int \frac{1}{x + 2} dx \right) \\ &= x + 4 \ln |x - 4| + \ln |x + 2| + C \end{aligned}$$



Ejemplo 5.8. Aplicación del método a integrales de otras funciones.

Calcular $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx$.

Solución:

- $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx = \int \frac{\sqrt{\sin x} \cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sqrt{\sin x} \cos x}{1 - \sin^2 x} dx$

- Sustituyendo $u^2 = \sin x$, se obtiene $2udu = \cos x dx$. Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx &= \int \frac{2u^2}{1 - u^4} du = \int \frac{2u^2}{(1 - u^2)(1 + u^2)} du \\ &\quad \text{descomponiendo en suma fracciones parciales:} \\ &= \int \left[\frac{2u^2}{(1 - u^2)(1 + u^2)} = -\frac{1}{u^2 + 1} - \frac{1/2}{u - 1} + \frac{1/2}{u + 1} \right] du \\ &= -\int \frac{1}{u^2 + 1} du - \int \frac{1/2}{u - 1} du + \int \frac{1/2}{u + 1} du \\ &= -\arctan u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u + 1}{u - 1} \right| + C \end{aligned}$$

Luego: $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x} dx = -\arctan \sqrt{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\sin x} + 1}{\sqrt{\sin x} - 1} \right| + C$



Ejercicio 5.1. Verificar cada integración, usando el método de las fracciones parciales:

$$1) \int \frac{x+2}{x^4-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} \right| + \frac{2}{x} + C$$

$$2) \int \frac{4x^2+6}{x^3+3x} dx = \ln K(x^2(x^2+3))$$

$$3) \int \frac{9x}{x^3-3x+2} dx = -2 \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{3}{x-1} + C$$

$$4) \int \frac{23x^2-2}{2x^3+3x^2-2x} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2(2x-1)^3| + 9 \ln |x+2| + C$$

$$5) \int \frac{x^5}{(x^2+4)^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{8}{x^2+4} - 4 \ln(x^2+4) + C$$

$$6) \int \frac{x^2+x-2}{(x^4+5x^2+4)^2} dx = \frac{1}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4} - \arctan x + \arctan \frac{x}{2} + C$$

$$7) \int \frac{1}{x^{1/2}-x^{1/4}} dx = 4 \ln |x^{1/4}-1| + 2\sqrt{x} + 4x^{1/4} + C$$



5.4 Autoevaluación

Calcular:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx & \text{b)} \int \frac{x^2+4}{x^2-4x+4} dx & \text{c)} \int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} dx \\ \text{d)} \int \frac{6-t}{t^4+2t^3} dt & \text{e)} \int \frac{x^3}{x^3-1} dx & \text{f)} \int \frac{1}{e^{2x}-3e^x} dx \end{array}$$

Respuestas:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} -\frac{2 \ln |x+3|}{15} + \frac{3 \ln (|x-2|)}{10} - \frac{\ln |x|}{6} + C & \text{b)} 4 \ln |x-2| - \frac{8}{x-2} + x + C \\ \text{c)} } \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C & \text{d)} -\ln \left| \frac{t+2}{t} \right| + \frac{2}{t} - \frac{3}{2t^2} + C \\ \text{e)} } x + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\ln(x^2+x+1)}{6} + \frac{\ln(x-1)}{3} + C & \text{f)} } \frac{e^{-x}}{3} + \frac{\ln(e^x-3)}{9} - \frac{x}{9} + C \end{array}$$



5.5 Desafío

Calcular:

$$\int \frac{2x^5-3x^3-6x-3}{(x^3+x^2+x)^2} dx$$