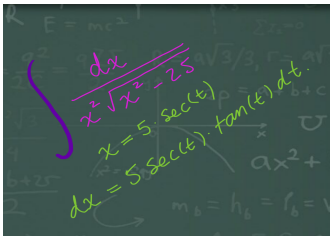
Sesión 8

Sustitución trigonométrica

Temas	Capacidades
✓ Método de sustitución trigonométrica.	▷ Conocer y comprender el método de cambio de variable trigonométrico. ▷ Calcular integrales que se puedan abordar usando el método de cambio de variable trigonométrico.

8.1 Introducción

Hemos visto que existen varios métodos de integración que permiten resolver una gran cantidad de integrales.



El método que aprenderemos en esta sección es principalmente utilizado para transformar integrales de funciones algebraicas (eventualmente complejas de abordar de forma directa) en integrales de funciones trigonométricas sencillas. Las sustituciones vienen sugeridas por las identidades Pitagóricas y debemos preocuparnos de usar la adecuada en cada situación.

Recordemos que, para todo $t \in \mathbb{R}$ donde las funciones trigonométricas estén bien definidas, se satisfacen las siguientes igualdades:

- $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$
- $\tan^2(t) + 1 = \sec^2(t)$

de las cuales se obtienen las igualdades a tener en cuenta en las sustituciones:

1) $1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$
2) $1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$
3) $\tan^2(t) + 1 = \sec^2(t)$
4) $\sec^2(t) - 1 = \tan^2(t)$

Considere el siguiente ejemplo como la idea general del método.

Ejemplo 8.1 *Calcular la integral:* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Solución: Para escoger el cambio trigonométrico adecuado es importante notar cuál de las cuatro igualdades anteriores (fíjese sólo en la parte izquierda de la igualdad) tiene la forma de la expresión " $1-x^2$ ". Acá podemos notar inmediatamente que las identidades 1 y 2 son las que se adecúan exactamente a la expresión anterior. De hecho, sugiere directamente que la variable x sea cambiada por la expresión $\cos(t)$ o $\sin(t)$ (cualquiera sirve)

¿Por qué hacer este cambio?

pues notemos que si hacemos, por ejemplo, $x = \sin(t)$ entonces el integrando nos queda de la siguiente manera:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$$

la cual es una expresión más sencilla si restringimos los valores de t al primer y al cuarto cuadrante, pues sabemos que $\cos(t)$ es positivo en esta parte.

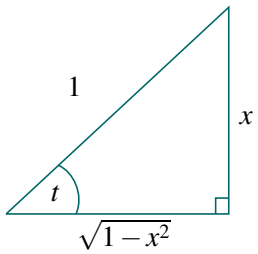
En definitiva, si hacemos el cambio $x = \sin(t)$, con $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, se tiene que $dx = \cos(t)dt$ y entonces:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt = \int \cos^2(t)\,dt$$

la cual es una integral que se puede desarrollar usando el cambio del ángulo doble

$$\int \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right) + C$$

Ahora que calculamos la integral con la ayuda del cambio trigonométrico, es necesario expresar el resultado final en la variable x. Para esto, notemos que, como $x = \sin(t)$, es inmediato que $t = \arcsin(x)$ y además, con la ayuda de un triángulo rectángulo, podemos escribir cualquier otra función trigonométrica en variable t, en términos algebraicos de la variable x:



de lo cual deducimos que $\cos(t) = \sqrt{1-x^2}$. Así

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}) + C$$

La siguiente tabla resume los cambios trigonométricos sugeridos para cada caso. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

Expresión	Cambio sugerido	Restricción	Identidad a usar
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\sin(t)$	$-\pi/2 \le t \le \pi/2$	$1 - \sin^2(t) = \cos^2(t)$
	$x = \frac{a}{b}\cos(t)$	$0 \le t \le \pi$	$1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$
$\sqrt{b^2x^2 + a^2}$	$x = \frac{a}{b}\tan(t)$	$-\pi/2 < t < \pi/2$	$\tan^2(t) + 1 = \sec^2(t)$
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b}\sec(t)$	$0 \le t < \pi/2$ o $\pi \le t < 3\pi/2$	$\sec^2(t) - 1 = \tan^2(t)$

En lo que sigue, la restricción para cada caso deberá ser subentendida por el lector.

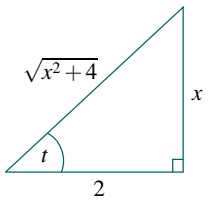
Ejemplo 8.2 *Calcular la integral:* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Solución: En este caso el cambio sugerido es $x = 2\tan(t)$, de donde $dx = 2\sec^2(t)\,dt$. Luego

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2(t)\,dt}{4\tan^2(t)\sqrt{4\tan^2(t)+4}} = \frac{2}{8}\int \frac{1\sec^2(t)\,dt}{\tan^2(t)\sqrt{\tan^2(t)+1}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\sec^2(t)\,dt}{\tan^2(t)\sec(t)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec(t)\,dt}{\tan^2(t)} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos(t)\,dt}{\sin^2(t)} = -\frac{\csc(t)}{4} + C$$

La última integral se calculó haciendo el cambio $u = \sin(t)$. Para expresar el resultado final en la variable x, podemos hacer un triángulo rectángulo usando la relación $x = 2\tan(t)$, o equivalentemente, $\frac{x}{2} = \tan(t)$



Luego, $\csc(t) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

De lo cual se obtiene que

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\csc(t)}{4} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

Ejemplo 8.3 *Calcular la integral:* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2-3}}{x^3}\,dx$

Solución: En este caso el cambio sugerido es $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec(t)$, de donde $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\sec(t)\tan(t)\,dt$. Además, notemos que

$$\sqrt{4x^2-3} = \sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sec(t)\right)^2 - 3} = \sqrt{4\cdot\frac{3}{4}\sec^2(t) - 3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sec^2(t)-1} = \sqrt{3}\tan(t)$$

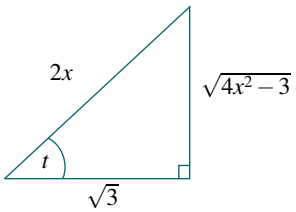
Luego, la integral nos queda:

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-3}}{x^3}\,dx = \int \frac{\sqrt{3}\tan(t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sec(t)\tan(t)\,dt}{\frac{(\sqrt{3})^3}{2^3}\sec^3(t)} = \frac{4}{\sqrt{3}}\int \frac{\tan^2(t)\,dt}{\sec^2(t)} = \frac{4}{\sqrt{3}}\int \sin^2(t)\,dt$$

cuya integral se resuelve usando la identidad del ángulo doble:

$$\int \sin^2(t)\,dt = \int \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sin(2t)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(t - \sin(t)\cos(t)\right)$$

De la relación $\frac{2x}{\sqrt{3}} = \sec(t)$, o equivalentemente $\frac{\sqrt{3}}{2x} = \cos(t)$, podemos construir un triángulo rectángulo:



obteniendo que $\sin(t) = \frac{\sqrt{4x^2-3}}{2x}$. Finalmente, tenemos que

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-3}}{x^3}\,dx = \frac{2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{4x^2-3}}{2x^2} + C$$

8.2 Autoevaluación

Calcular las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

4) $\displaystyle\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$

5) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Respuestas:

1) $-\frac{1}{5}(9-x^2)^{3/2}(x^2+6)+C$

2) $\sqrt{x^2+1}+\ln|x|-\ln|\sqrt{x^2+1}+1|+C$

3) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan(x)\right)+C$

4) $\frac{1}{2}\left((x-2)\sqrt{5+4x-x^2}-9\arcsin\left(\frac{2-x}{3}\right)\right)+C$

5) $-\frac{1}{16}(2x+3)\sqrt{3+4x-4x^2}-\frac{3}{8}\arcsin(\frac{1}{2}-x)+C$

6) $\arcsin(\sqrt{x})+\sqrt{x(1-x)}+C$

8.3 Desafío

Calcular la siguiente integral:

$$\int \sqrt{x^2-2x-2}\,dx$$