Sesión 9

Sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Temas

✓ Método de sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

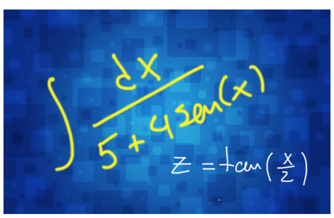
Capacidades

▷ Conocer y comprender el método de cambio de sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

▷ Calcular integrales que se puedan abordar usando el método de cambio de variable $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

9.1 Introducción

Hemos visto que existen varios métodos de integración que permiten resolver una gran cantidad de integrales.



En esta sesión se tratará el un método bien particular, que suele ser utilizado cuando en el integrando aparecen expresiones como sumas de cosenos y senos, incluso en el denominador. Generalmente es fácil detectar cuando una integral indefinida se puede resolver por el método $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Recordemos las siguientes identidades:

- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x) \Rightarrow 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \Rightarrow \sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} z = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad &\Rightarrow \quad x = 2\arctan(z) \\ &\Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+z^2} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2z}{1+z^2} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{2}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \\ &= \frac{2}{1+z^2} - 1 \\ &= \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{aligned}$$

Así las sustituciones respectivas son:

$$\boxed{z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \boxed{\sin(x) = \frac{2z}{1+z^2}} \quad \boxed{\cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}} \quad \boxed{dx = \frac{2}{1+z^2}}$$

Ejemplo 9.1 *Calcular la integral:* $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)-\cos(x)}$

Solución:

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)-\cos(x)} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z(1+z)} = \ln|z| - \ln|1+z| + C$$

Luego reemplazando $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ tenemos que:

$$\int \frac{dx}{1+\sin(x)-\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Ejemplo 9.2 *Calcular la integral:* $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\cos(x)}$

Solución: $\displaystyle\int \frac{dx}{3-2\cos(x)} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{3-2\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{1+5z^2} = \int \frac{2\,dz}{1+(\sqrt{5}z)^2}$

haciendo el cambio de variables $u = \sqrt{5}z \Rightarrow du = \sqrt{5}\,dz \Rightarrow \dfrac{du}{\sqrt{5}} = dz$ tenemos que:

$$\int \frac{2\,dz}{1+(\sqrt{5}z)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(u) = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan(\sqrt{5}z)$$

Reemplazando por $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ se tiene que finalmente

$$\int \frac{dx}{3-2\cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

9.2 Autoevaluación

Calcular las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \sec x\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\sin(x)}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

Respuestas:

1) $\ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C$

2) $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$

3) $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{5\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3}{4}\right) + C$

4) $\ln\left|1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

9.3 Desafío

Calcular la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{5 + 4\sin(x)}$$