

Regla de L'Hopital

Temas

- ✓ Regla de L'Hopital.
- ✓ Aplicaciones de la Regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas.

Capacidades

- ▷ Conocer y comprender la regla de L'Hopital.
- ▷ Calcular límites de formas indeterminadas, usando la regla de L'Hopital.

17.1 Introducción



Johann Bernoulli
Suizo. (1667-1748)

La regla de L'Hopital se atribuye al matemático francés Guillaume François Antoine, Marqués de L'Hopital, quien dio a conocer el método en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692), el primer texto que se ha escrito sobre cálculo, influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores, Johann Bernoulli, Johann Bernoulli y Leibniz. Este método permite calcular ciertos límites que con los procedimientos estudiados en Cálculo I, es difícil determinar.

Esta regla, llamada también, regla de L'Hopital-Bernoulli, es utilizada para determinar límites de formas indeterminadas del tipo: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, y se puede aplicar también a otros casos indeterminados.

17.2 Formas indeterminadas

En algunas aplicaciones del Cálculo se requiere calcular por ejemplo, límites del tipo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(a) = g(a) = 0$. El cálculo de estos límites no es inmediato.

Nota 17.1. Cuando una función, para cierto valor de la variable independiente, toma una de las formas:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^\infty, \quad 1^\infty$$

se dice que es *indeterminada*.

Observación. En Cálculo I, se trató algunas técnicas para calcular límites de algunas formas indeterminadas. Por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo, con las técnicas tratadas no es posible determinar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Notar que, para $x = 0$, la función $\frac{\sin x}{x}$ es indeterminada. Pero, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ existe y es igual a 1.

Otros ejemplos de límites de formas indeterminadas son:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{\ln(e^x + x)}$$

La Regla de L'Hôpital proporciona un método para calcular límites de formas indeterminadas de los tipos:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

que se puede extender a las otras formas indeterminadas.

17.3 Regla de L'Hôpital. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.



Teorema 17.1. Regla de L'Hôpital (forma débil).

Sean f y g son funciones derivables en $x = a$, tales que $f(a) = g(a) = 0$. Si $g'(a) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración

Como $f(a) = g(a) = 0$, se tiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)}$$

Como f y g son derivables en a , y como $g'(a) \neq 0$, entonces:

- $g(x)$ es no nulo en una vecindad de $x = a$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right) = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad \blacksquare$$



Ejemplo 17.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

Nota 17.2. Observar los gráficos de $y = \frac{\sin x}{x}$ e $y = \cos x$, en las cercanías de $x = 0$, en el siguiente dibujo.

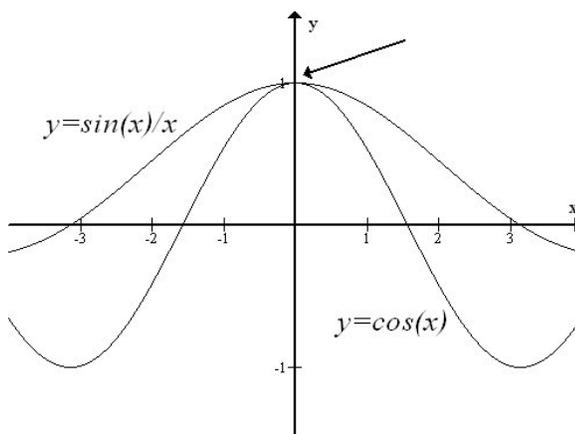


Gráfico de $y = \frac{\sin x}{x}$ e $y = \cos x$



Teorema 17.2. Regla de L'Hopital, primera generalización.

Sean f y g funciones derivables en una vecindad del punto $x = a$, tal que $g'(x)$ es distinta de cero en esa vecindad.

Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho sea un número real, o bien $+\infty$, o $-\infty$.

Nota 17.3. En esencia, la regla de L'Hopital dice que, si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = a$, entonces, con algunas restricciones, este cociente tiene el mismo límite que en $x = a$ que el cociente de las derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que este último límite exista (finito o infinito).



Ejemplo 17.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$

 **Ejemplo 17.3.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}$

 **Ejemplo 17.4.** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2 + x^3} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\underbrace{2x + 3x^2}_{\text{no es indeterminada}}} \stackrel{[\frac{1}{0}]}{=} \infty$

 **Ejercicio 17.1.** Calcular $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{d}{dt} \int_{1/2}^t \frac{x^2 - 1}{x \ln x^{3/2}} dx$.

Nota 17.4. Aplicación reiterada de la regla de L'Hopital. Si el cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ resulta indeterminado, entonces se puede aplicar nuevamente la regla de l'Hopital por segunda vez (o tercera vez, etc.) siempre que se cumplan las condiciones. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

 **Ejemplo 17.5.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi \sin \pi x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\pi x \sin \pi x} \\ &\stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi \sin \pi x + \pi^2 x \cos \pi x} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \end{aligned}$$

17.4 Regla de L'Hopital. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.



Teorema 17.3. Regla de L'Hopital, segunda generalización.

Sean f y g funciones derivables en una vecindad de a , tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

Si $g'(x)$ no se anula en la vecindad de a entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho sea un número real, o bien $+\infty$, o $-\infty$.

Nota 17.5. El teorema anterior dice que, la regla de L'Hopital también se puede aplicar cuando $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Nota 17.6. La Regla de H'Opital también se cumple cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$ o ∞ , tal como se muestra en los siguientes ejemplos.



Ejemplo 17.6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x^3}{x^3 - 2x + 5} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 9x^2}{3x^2 - 2} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 18x}{6x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{18}{6} = 3$$



Ejemplo 17.7.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x + 1} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{\text{no es indeterminada}} \stackrel{[\frac{\infty}{2}]}{=} +\infty$$

Nota 17.7. Resumiendo, la Regla de L'Hopital se puede enunciar como sigue:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en una vecindad de a , tal que que $g'(x) \neq 0$ cerca de a .

Si para $x = a$, siendo a un número real, o $+\infty$ o $-\infty$, el cuociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada del tipo: $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el limite del segundo lado exista, o bien sea $+\infty$ o $-\infty$

17.5 Otras formas indeterminadas

Por medio de *arreglos algebraicos*, es posible aplicar la regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas:

17.5.1 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Si para $x = a$, la función $f(x) \cdot h(x)$ toma la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, la función se escribe en la forma:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{0}{0}$$

o bien:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

y luego se aplica la regla de L'Hôpital.

✂ **Ejercicio 17.2.** Probar que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec 3x \cos 5x) = -\frac{5}{3}$

✂ **Ejercicio 17.3.** Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$

17.5.2 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ entonces se dice que $f(x) - g(x)$ tiene la forma $\infty - \infty$. Para calcular $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ se transforma la expresión $f(x) - g(x)$ en una fracción de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que se pueda aplicar la regla de L'Hôpital.

✂ **Ejemplo 17.8.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) & \stackrel{[\infty - \infty]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ & \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} \\ & \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-x \sin x + 2 \cos x} \\ & = 0 \end{aligned}$$

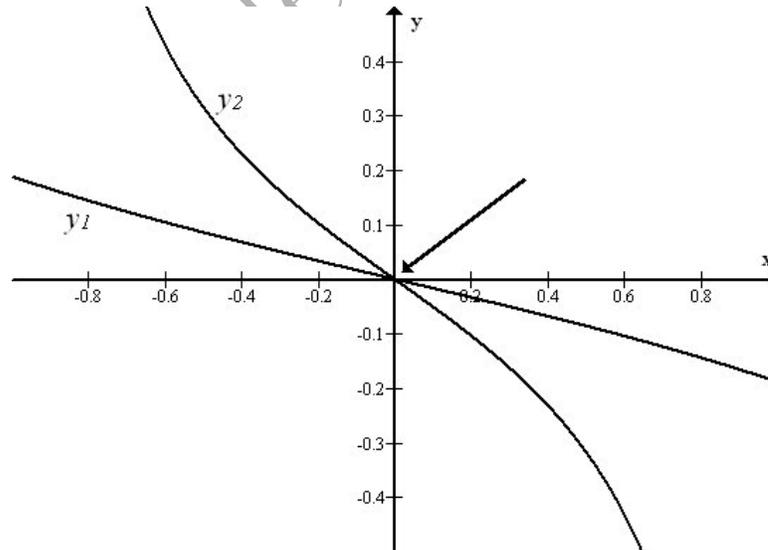


Gráfico de $y_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ e $y_2 = \frac{-\sin x}{-x \sin x + 2 \cos x}$

Ejercicio 17.4. Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^{2x}) = -\infty$. Sugerencia: Factorizar.

17.5.3 Formas indeterminadas 0^0 , 1^∞ , ∞^0

Si una función de la forma $f(x)^{h(x)}$ toma una de las siguientes formas indeterminadas, cuando $x \rightarrow a$:

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

entonces, para calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{h(x)}$, se procede como sigue:

- Sea $y = f(x)^{h(x)}$
- Se aplica logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln y = \ln f(x)^{h(x)}$$

obteniendo:

$$\ln y = h(x) \ln f(x)$$

donde $h(x) \ln f(x)$ tiene la forma indeterminada:

$$0 \cdot \infty$$

o bien $\infty \cdot 0$.

- Determinando $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{h(x)}$ usando un método ya tratado, se obtiene $L = \lim_{x \rightarrow a} \ln y$.
- Luego:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln y} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow a} \ln y\right)} = e^L$$



Ejemplo 17.9. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

Solución

La función x^x toma la forma 0^0 cuando $x \rightarrow 0^+$.

- Sea $y = x^x$.

$$\ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \text{ es de la forma } \frac{-\infty}{\infty}, \text{ cuando } x \rightarrow 0^+$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$
- Luego: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$
- Por lo tanto: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$

✂ **Ejercicio 17.5.** Probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

🌡 17.6 Autoevaluación

Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$

d) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t^2 + 4)}{\ln(t-1)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

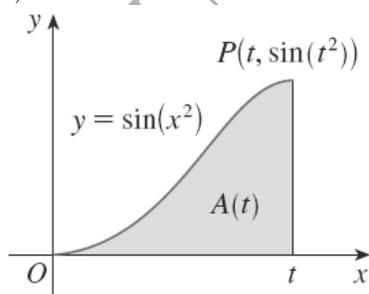
g) $\lim_{u \rightarrow 3} \frac{1}{u-3} \int_3^u \frac{\sin x}{x} dx$

h) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x}(1-x) dx$

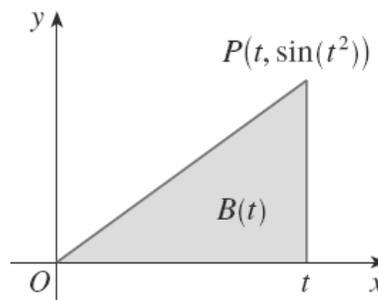
Respuestas: a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 2 f) $-\frac{1}{8}$ g) 0.047 h) 0

↕ 17.7 Desafío

Las siguientes figuras muestran dos, A y B regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $t = \sin(x^2)$ de 0 a t , y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O , P y $(t, 0)$.



Area $A(t)$



Area $B(t)$

Calcular

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A(t)}{B(t)}$$