Sesión 18

Integrales impropias I

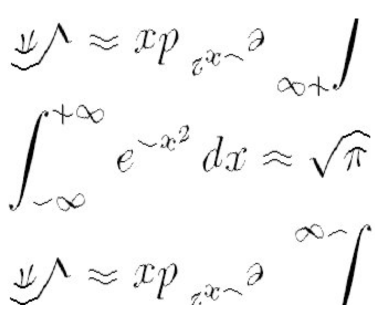
Temas

- ✓ Introducción.
- ✓ Integrales impropias tipo I

Capacidades

- ▷ Conocer y comprender la manera de abordar la integración de funciones continuas sobre intervalos no acotados.
- ▷ Conocer y aplicar las definiciones de integrales de funciones continuas sobre intervalos no acotados.

18.1 Introducción



Una integral impropia tipo I

Como se recuerda, la integral de Riemann se ha definido para funciones continuas definidas sobre intervalos cerrados. Sin embargo, en muchas situaciones surge la necesidad de integrar, tanto funciones continuas sobre intervalos no acotados, como por ejemplo el intervalo $[a, +\infty[$, como también funciones con discontinuidades infinitas. Las integrales que se definen para estos dos casos reciben el nombre *integrales impropias*.

18.2 Un problema inicial

Ejercicio 18.1. *Dada la función* $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ *, es un problema sencillo encontrar el área, A, en el primer cuadrante de la región R limitada por el gráfico de* $y = f(x)$*, el eje* X *y las rectas* $x = 1$ *y* $x = 5$*. Resolver este problema. Se adjunta el gráfico de la región indicada.*

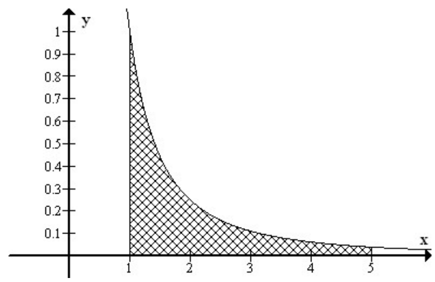


Gráfico (parcial) de la región R

18.3 Un problema *nuevo*

Ejemplo 18.1. *Se quiere calcular ahora, toda el área de la región, S, en el primer cuadrante limitada por el gráfico de* $y = f(x)$*, el eje* X *y la recta* $x = 1$*.*

1) *Graficar la región indicada.*
2) *¿Cómo se podría calcular aproximadamente el área pedida, en caso que ella exista?.*
3) *¿Cuál sería la integral que representa toda el área buscada?*
4) *¿Cómo se podría calcular esta integral? (***¡este es el problema nuevo!***)*

Solución:

1) Un gráfico (parcial) de la región indicada es:

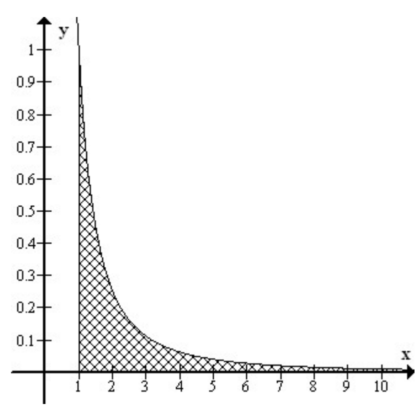


Gráfico (parcial) de la región S

2) Una manera de aproximar el área buscada (en caso que ella exista) es calcular el área de la región limitada por el gráfico de $\frac{1}{x^2}$, el eje X, la recta $x = 1$ y, por ejemplo, la recta $x = 100$. El valor numérico de esta área viene dada por la integral $\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\, dx$, cuyo valor es $\frac{99}{100} = 0.99$.

3) *Toda el área* buscada vendría dada por una integral del tipo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \qquad (*)$$

4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\, dx$

Nota 18.1. Una integral del tipo $(*)$ es llamada *integral impropia*. En general, cuando *al menos uno de los límites de integración no es finito* o bien *cuando la función no es acotada en el intervalo de integración*, la integral recibe el nombre *integral impropia*.

18.4 Integrales impropias (Tipo I)

1) Si f es continua en el intervalo $[a, +\infty[$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^{b} f(x)\, dx$$

2) Si f es continua en el intervalo $]-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{b} f(x)\, dx$$

3) Si f es continua en el intervalo $]-\infty, +\infty[$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_c^{+\infty} f(x)\, dx,$$

donde c es cualquier número real.

Nota 18.2. Cuando uno de los límites precedentes existe finito, se dice que la integral impropia respectiva es *convergente*. En caso contrario se dice *divergente*. La tercera integral impropia no es convergente en caso que una de las integrales del lado derecho no converja.

Ejemplo 18.2. *Estudiar la convergencia de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\, dx$.

Solución: Reemplazando el límite infinito por un parámetro b y tomando el límite cuando $b \to +\infty$, se tiene:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{3}e^{-3x} \Big|_0^b \right] = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{3}(e^{-3b}-1) = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx$ es convergente, pues su valor es finito $(=\frac{1}{3})$.

Nota 18.3. La integral calculada representa el área bajo el gráfico de $y = e^{-3x}$ desde $x = 0$ hasta $x = +\infty$.

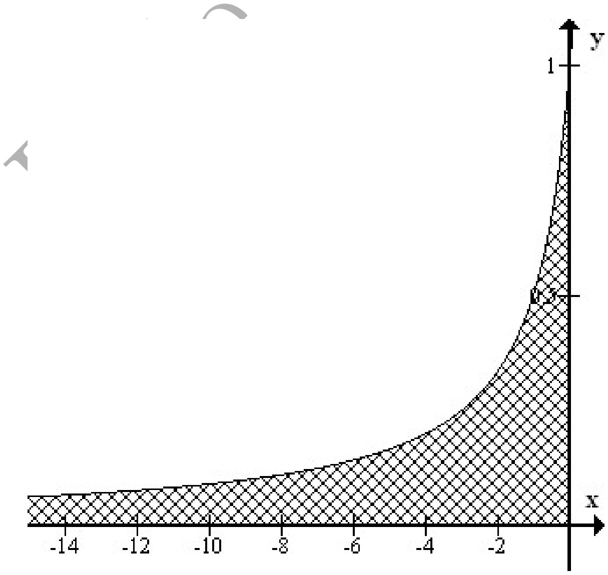
Ejemplo 18.3. *Estudiar la convergencia de* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx$

Solución: Reemplazando el límite infinito por un parámetro a y tomando el límite cuando $a \to -\infty$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[-\ln(1-x)\Big|_a^0 \right] = \lim_{a\to-\infty} \ln(1-a) = +\infty$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1-x}\,dx$ es divergente, pues su valor es infinito.

Por lo tanto, el área achurada (parcialmente) en el siguiente gráfico es infinita (no existe).



Area bajo la curva $y = \frac{1}{1-x}$ *entre* $-\infty$ *y* 0

Ejercicio 18.2. *Dada la integral impropia*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

determinar los valores de p para los cuales ella es convergente y los valores de p para los cuales ella es divergente. Realizar el mismo estudio para

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}\ dx$$

18.5 Autoevaluación

Estudiar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias del tipo I. En caso de convergencia, indicar su valor.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sin^2 x \cos^3 x\ dx$

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+x^2-2x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln^2(\ln x)}\, dx$

Solución:

a) Converge. Su valor es 2

b) Diverge

c) Converge. Su valor es $\frac{5\ln(2)}{6}$

d) Converge. Su valor es $\frac{1}{\ln(\ln 2)}$

18.6 Desafío

Para cada número natural n se define:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}}\ dx$$

1) Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) \cdot I_{n-1}$

2) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^4}\ dx$

3) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^5}\, dx$

4) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{(x^2+1)^6}\, dx$