Sesión **19**

# Integrales impropias II

**Temas**

- ✓ Introducción.
- ✓ Integrales impropias tipo II

**Capacidades**

- ▷ Conocer y comprender la manera de abordar la integración de funciones con discontinuidades infinitas.
- ▷ Conocer y aplicar las definiciones de integrales de funciones con discontinuidades infinitas.



---

## 19.1 Introducción

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

*Una integral impropia tipo II*

En la sesión precedente se inicio el estudio de las integrales impropias, estudiando la manera de enfrentar el cálculo de integrales en las cuales el dominio de integración no es un intervalo acotado. El otro caso especial que se presenta, como se comentó, es cuando la función presenta una discontinuidad infinita. Las integrales de estas funciones, que se estudian en esta sesión, reciben el nombre de *integrales impropias del tipo II*.

## 19.2 Integrales impropias (Tipo II)

Considerar la función $y = \dfrac{x}{2-x}$, cuyo gráfico entre 0 y 2 viene dado por:

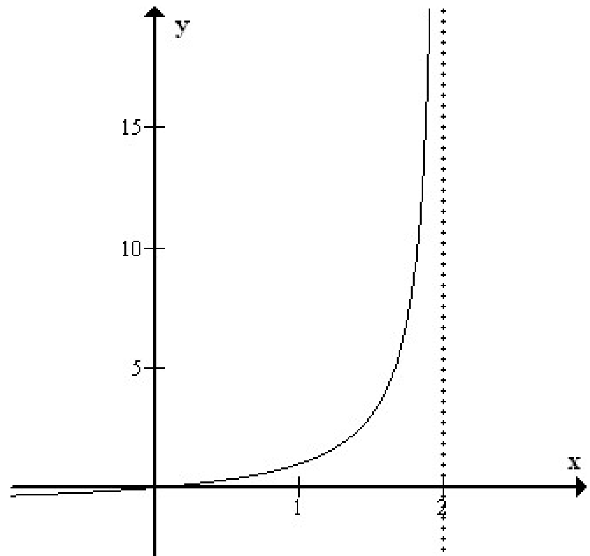


*Gráfico de* $y = \frac{x}{2-x}$

en este caso, por no ser acotada la función $f$ en el intervalo $[0, 2]$, la integral de Riemann

$$\int_0^2 \frac{x}{2-x}\, dx$$

no está definida. Integrales de este tipo se denominan *integrales impropias de tipo II.*

**Ejercicio 19.1.** *¿Cómo estima usted que se podría definir la integral impropia precedente?*

## 19.3 Definición de Integrales impropias tipo II

1) Si $f$ es continua en el intervalo $[a, b[$ y tiene una discontinuidad infinita en $b$, es decir $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$), entonces se define:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)\, dx}$$

2) Si $f$ es continua en el intervalo $]a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en $a$, es decir $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), entonces se define:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\,dx}$$

3) Si $f$ es continua en el intervalo $[a,b]$, excepto en $c$ de $]a,b[$ donde $f$ presenta una discontinuidad infinita, entonces se define:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

**Nota 19.1.** En cada uno de los casos anteriores, si el límite existe finito se dice que la integral impropia es *convergente*, si el límite no existe, se dice que la integral impropia es *divergente*.

**Ejemplo 19.1.** *Determinar si la integral impropia* $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$ *converge o diverge.*

**Solución**:
Claramente el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$. Como este número se encuentra en el intervalo $]0,4[$, se tiene que

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Para que la integral estudiada converja, se necesita que las *dos* integrales del lado derecho converjan. Calculemos la primera de ellas:

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{c\to 3-} \int_0^c \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{c\to 3-} \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^c = \lim_{c\to 3-} \left(\frac{-1}{c-3} - \frac{1}{3}\right) = +\infty$$

Por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$ diverge.

**Nota 19.2.** Es importante señalar que el Teorema Fundamental del Cálculo no se puede aplicar a la integral del ejemplo precedente. En caso que, sin darse cuenta que esta integral es impropia, se aplica *incorrectamente* el Teorema Fundamental del Cálculo, se obtendría que:

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^4 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

Resultado que es claramente incorrecto, ya que el integrando es siempre positivo.

## 19.4 Autoevaluación

Establecer la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales impropias (tipo II). En caso de convergencia, determinar su valor.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{x^5}}$

**Solución**:

a) Converge. Su valor es $\frac{8}{3}$

b) Converge. Su valor es $\pi$

c) Diverge.

## 19.5 Desafío

Si $m$ es un entero positivo, probar que

$$\int_0^1 (\ln x)^m\,dx = (-1)^m m!$$