Sesión 27

Series de potencias

Temas

- ✓ Series de potencias.
- ✓ Intervalo y radio de convergencia de una serie de potencias.

Capacidades

- ▷ Conocer y comprender el concepto de serie de potencias.
- ▷ Determinar el intervalo y el radio de convergencia de una series de potencias.

27.1 Introducción

Jean D'Alembert
Francés. (1717 - 1783).

En esta sesión iniciamos el último tema de este módulo: las series de potencias.
El estudio de las series de potencias, va a permitir abordar nuevas situaciones problemáticas y también aporta nuevos recursos para enfrentar de otra manera algunas situaciones ya estudiadas, entre otras, calcular límites indeterminados, determinar valores aproximados de integrales definidas en las cuales no es posible encontrar una primitiva de la función involucrada, resolver ecuaciones diferenciales, y calcular sumas de algunas series de constantes.

27.2 Definición de serie de potencias

Sea (a_n) una sucesión. Una serie de la forma:

$$\sum a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 \cdots$$

recibe el nombre de *una serie de potencias en* $(x-a)$, o en torno al punto a.

En particular, una serie de la forma:

$$\sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \cdots$$

recibe el nombre de *una serie de potencias en* x, o en torno al 0.

Nota 27.1. En la definición precedente,

- x es una variable y los a_n constantes, denominadas *coeficientes de la serie*.
- para un valor dado de x, la convergencia de la serie puede ser estudiado con los criterios de convergencia ya revisados.
- es claro que la serie puede converger para algunos valores de x y diverger para otros.
- se ha usado la convención de aceptar que $x^0 = 1$, aún en el caso que x sea igual a 0.

Nota 27.2. Es interesante observar y tener presente que, una serie de potencias generaliza el concepto de polinomio. Se puede notar que una serie de potencias *es como un polinomio con infinitos términos.*

Ejercicio 27.1. *¿La afirmación "todo polinomio es una serie de potencias" es verdadera o falsa?.*

Nota 27.3. El problema que se aborda a continuación es, dada una serie de potencias, determinar todos los valores de x para los cuales, ella es convergente. Es decir, dada una serie de potencias $\sum a_n(x-a)^n$, interesa determinar el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \text{la serie } \sum a_n(x-a)^n \text{ es convergente}\}$$

Observar que S nunca es vacío (¿por qué?). Los siguientes ejemplos y ejercicios ilustran una manera de determinar el conjunto S, como así mismo las formas que puede tener este conjunto.

Ejemplo 27.1. *Determinar el conjunto de todos los* x *para los cuales la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$ *es convergente.*

Solución: Usando el criterio del cuociente, se tiene que la serie converge cuando:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 3^{(n+1)}}}{\frac{x^n}{n^2 3^n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{|x|}{3}$$

Luego la serie de potencias converge por lo menos para $\frac{|x|}{3} < 1$, es decir, la serie de potencias converge al menos en el intervalo $]-3, 3[$.

Veamos que sucede en los puntos -3 y 3.

- Para $x = -3$, la serie toma la forma $\sum \frac{1}{n^2}$, que es convergente (serie en p con $p = 2 > 1$).
- Para $x = 3$, la serie es $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$, que es convergente (criterio de *Leibniz* para series alternadas).

Luego, la serie de potencias estudiada converge en el intervalo cerrado $[-3, 3]$.

Ejemplo 27.2. *Determinar el conjunto de todos los x para los cuales la serie de potencias $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ es convergente.*

Solución: Usando el criterio de la raíz, se tiene que la serie converge cuando:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

Luego la serie de potencias converge por lo menos para $|x| < 1$, es decir, la serie de potencias converge al menos en el intervalo $]-1, 1[$.

Veamos que sucede en los puntos -1 y 1.

- Para $x = -1$, la serie toma la forma $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, que es convergente (criterio de *Leibniz* para series alternadas.)
- Para $x = 1$, la serie es $\sum \frac{1}{n}$, que es divergente (serie en p con $p = 1$).

Luego, la serie de potencias estudiada converge en el intervalo cerrado-abierto $[-1, 1[$.

Ejercicio 27.2. *Determinar el conjunto de todos los x para los cuales las siguientes series de potencias son convergentes.*

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$ 3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ 4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x-2)^n$ 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$

Solución: 1) $]-1, 1]$ 2) $\{0\}$ 3) $\mathbb{R}$ 4) $]0, 4]$ 5) $[-2, 0]$

Teorema 27.1. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^+$ un número para el cual la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ converge y $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_1| < x_0$, entonces esta serie converge absolutamente en x_1.*

Demostración:

Por demostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x_1^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\,|x_1^n|$ es convergente.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_0^n$ converge se tiene que $\lim_{n\to+\infty} a_n\, x_0^n = 0$. Luego, la sucesión $(a_n x_0^n)$ está acotada. Por lo tanto, existe un $K > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$: $|a_n x_0^n| < K$.

Ahora bien, como $0 \leqslant |a_n x_1^n| = |a_n x_0^n (\frac{x_1}{x_0})^n| = |a_n x_0^n||\frac{x_1}{x_0}|^n \leqslant K|\frac{x_1}{x_0}|^n$ y recordando el criterio de comparación, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n x_1^n|$ es convergente. ■

Corolario 27.2.1. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^+$ un número para el cual la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ diverge. Si $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|x_1| > x_0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ diverge en x_1.*

Nota 27.4. El siguiente teorema caracteriza los tipos de conjuntos que corresponden a los números reales donde converge una serie de potencias.

Teorema 27.2. *Sea S el conjunto de puntos x para los cuales las serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge. Entonces, o bien:*

1) *S consiste solo del punto $x = 0$, es decir, $S = \{0\}$, o bien*

2) *S consiste de todos los números reales, es decir, $S = \mathbb{R}$; o bien*

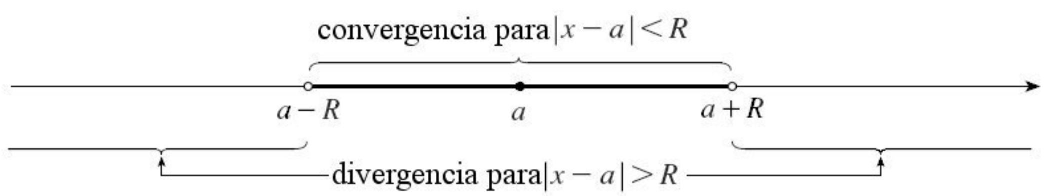
3) *S es un intervalo de una de las siguientes formas: $]-R, R[$, $[-R, R]$, $[-R, R[$, o $]-R, R]$, donde R es un número real positivo.*

Nota 27.5. Análogamente, en el caso de la serie de potencias $\sum a_n(x-a)^n$, S puede ser $\{a\}$, $\mathbb{R}$ o un intervalo de la forma $]a-R, a+R[$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R[$, o $]a-R, a+R]$, donde R es un número real positivo.

Nota 27.6. Observar que el teorema precedente es coherente (¡y no puede ser de otra manera!) con los ejemplos (27.1), (27.2) y las soluciones del ejercicio (27.2).

27.3 Definición de intervalo de convergencia

El conjunto S de puntos x para los cuales la serie de potencias $\sum a_n x^n$ converge es llamado *intervalo de convergencia*, y el número R es llamado *radio de convergencia*. En en caso (1) del Teorema precedente, se define $R = 0$, y en el caso (2) se anota $R = +\infty$. Por lo tanto, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.



Ejemplo 27.3. *Encontrar el intervalo y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n}}$.*

Solución: Por el criterio del cuociente,

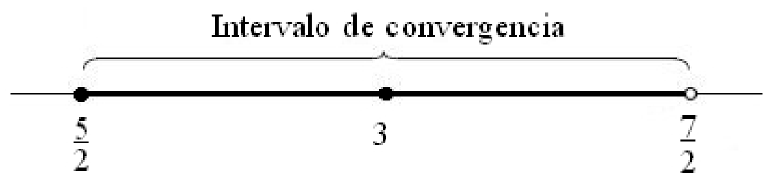
$$\left| \frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n(x-3)^n} \right| = 2\,|x-3| \sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 2\,|x-3|$$

luego la serie converge cuando

$$2|x-3| < 1 \Rightarrow \tfrac{5}{2} < x < \tfrac{7}{2}.$$

Luego, la serie converge (absolutamente) cuando $\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$.

Chequeando los puntos extremos, se tiene:
En $x = \frac{5}{2}$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la cual es convergente (Criterio de Leibniz).
En $x = \frac{7}{2}$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, la cual diverge (serie p, con $p = \frac{1}{2} < 1$).
Por lo tanto, $S = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}[$ y $R = \frac{1}{2}$.



Intervalo de convergencia de $\sum \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n}}$

Teorema 27.3. *El radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum a_n(x-a)^n$ *es*

- $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *donde* $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, *en caso que este límite exista.*
- $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, *en caso que este límite exista, y con las convenciones* $\frac{1}{0} = +\infty$ *y* $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Nota 27.7. Una serie de potencias define una función cuyo dominio es justamente, su intervalo de convergencia. Por ejemplo, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ tiene como intervalo de convergencia a $]-1,1[$, y en este intervalo la serie define la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Es decir,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ para } x \in \,]-1,1[$$

27.4 Autoevaluación

Determinar el intervalo y radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

1) $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dots$

2) $\dfrac{\ln 2\,(x-5)}{\sqrt{2}} + \dfrac{\ln 3\,(x-5)^2}{\sqrt{3}} + \dfrac{\ln 4\,(x-5)^3}{\sqrt{4}} + \dots$

3) $\sum (-2)^n \dfrac{n+2}{n+1} \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^n$

4) $\sum \dfrac{3^n x^n}{n}$

Solución:
1) $]-\infty,\infty[=\mathbb{R}$, $R=+\infty$. 2) $[4,6[$, $R=1$. 3) $]-1,1[$, $R=\frac{1}{2}$. 4) $]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[$, $R=\frac{1}{3}$.

27.5 Desafío

Determinar el o los valor(es) de a de manera que el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum(-1)^n \frac{4^n\,(x+1)^n}{a^n\,\ln n}$$

sea $]-3,1[$.