Sesión 28

Funciones y series de potencias

Temas

✓ Métodos para determinar series de potencias de nuevas funciones.

Capacidades

▷ Conocer y aplicar el método de sustitución para encontrar series de potencias.

▷ Conocer y aplicar el método algebraico para encontrar series de potencias.

▷ Conocer y aplicar métodos del cálculo (derivadas e integrales) para encontrar series de potencias.

28.1 Introducción

Colin Maclaurin
Escocés. (1698 - 1746).

En esta sesión se estudian métodos para encontrar funciones, con sus correspondientes series de potencias que las representan, y sus respectivos intervalos de convergencia.
Para ello revisamos tres maneras de abordar este problema:
El primero consiste en partir de una serie de potencias con suma conocida y efectuar una sustitución de su variable. El segundo consiste en operar algebraicamente con las series de potencias, y el tercero, consiste en derivar o integrar una función con serie de potencias conocida.

28.2 Método de sustitución para encontrar series de potencias

A continuación se ilustra, usando la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \text{para} \qquad -1 < x < 1 \tag{28.1}$$

que es una serie de potencias con suma conocida, la forma de obtener, usando éste método, otras funciones con su correspondiente intervalo de convergencia.

- Si se sustituye x por $-x$ en (28.1) se obtiene la siguiente serie de potencias con la función que ella representa.

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad \text{para} \qquad -1 < x < 1 \tag{28.2}$$

- Análogamente, si se sustituye x por $\frac{x}{2}$ en (28.1) se obtiene una nueva serie de potencias con su correspondiente función suma

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^3}x^3 + \cdots + \frac{1}{2^n}x^n + \cdots = \frac{2}{2-x} \qquad \text{para} \qquad -2 < x < 2$$

- De la misma forma, si se reemplaza x por $x-3$ en (28.2) se obtiene

$$1 - (x-3) + (x-3)^2 - \cdots + (-1)^n (x-3)^n + \cdots = \frac{1}{x-2} \quad \text{para} \quad 2 < x < 4$$

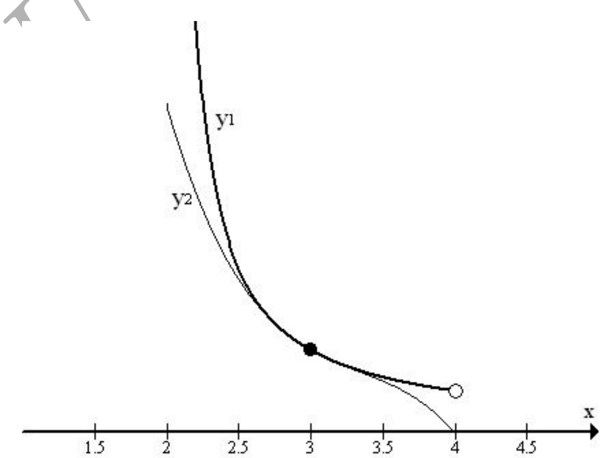

Gráfico de $y_1 = \frac{1}{x-2}$ *e* $y_2 = 1 - (x-3) + (x-3)^2 - (x-3)^3$

Ejercicio 28.1. Encontrar la serie de potencias de la función $f(x) = \frac{-1}{2+x}$, junto a su correspondiente intervalo de validez.

28.3 Método algebraico para encontrar series de potencias

Dada la similitud entre los conocidos polinomios y las series de potencias, éstos comparten muchas propiedades. Por ejemplo,

Teorema 28.1. *Si $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ en un intervalo I, $g(x) = \sum b_n(x-a)^n$, en un intervalo J y $k \in \mathbb{R}$. Entonces*

- $kf(x) = \sum k a_n(x-a)^n$ *en I.*
- $f(x) \pm g(x) = \sum (a_n \pm b_n)(x-a)^n$, *en $I \cap J$.*
- $f(x) \cdot g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$, *en $I \cap J$.*

Nota 28.1. Un resultado análogo es válido para el cuociente, $\frac{f(x)}{g(x)}$, con la única restricción que $b_0 \neq 0$.

Ejemplo 28.1. *Determinar la serie de potencias de $\frac{x^2}{2-x}$.*

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{2-x} &= \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^4}{2^3} + \cdots \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Como la serie usada converge para $|\frac{x}{2}| < 1$, se tiene que la igualdad obtenida en válida para $|x| < 2$.

Ejemplo 28.2. *Determinar la serie de potencias de $\frac{1}{(1+x)^2}$.*

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} \\
&= (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) \cdot (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) \\
&= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n
\end{aligned}$$

Igualdad válida en el intervalo $]-1, 1[$.

Ejercicio 28.2. *Determinar la serie de potencias de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$.*

28.4 Métodos del cálculo para encontrar series de potencias

En lo que sigue, se inicia el camino para establecer un método que permite *facilitar* la búsqueda de series de potencias con su correspondiente suma.

Lema 28.1. *Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ es una serie de potencia con radio de convergencia $R > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ también tiene radio de convergencia R.*

Demostración:
Sea $x \in]-R, R[$. Entonces $|x| < R$. Sea x_1 tal que $|x| < |x_1| < R$.

Como $\sum a_n x_1^n$ es convergente. (A)

se tiene que $\lim a_n x_1 = 0$. Luego, existe un $M > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$: $|a_n x_1^n| < M$.

Ahora bien, $|n a_n x^{n-1}| = \left| n a_n \cdot \dfrac{x^{n-1}}{x_1^n} \cdot x_1^n \right| = n \dfrac{|a_n x_1^n|}{|x_1|} \left| \dfrac{x}{x_1} \right|^{n-1}$

Por lo tanto: $|n a_n x^{n-1}| \leqslant n \dfrac{M}{|x_1|} \left| \dfrac{x}{x_1} \right|^{n-1}$ (B)

Ahora, aplicando el criterio del cuociente se obtiene que $\frac{M}{x_1} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \frac{x}{x_1} \right|^{n-1}$ es convergente (absolutamente). (C)

Por lo tanto, la serie $\sum n a_n x^{n-1}$ también converge (absolutamente). (D)

Como x es un número arbitrario del intervalo $]-R, R[$, se tiene que si el intervalo de convergencia de $\sum n a_n x^{n-1}$ es R', entonces $R' \geqslant R$.

Para finalizar esta demostración se debe comprobar que R' no puede se mayor que R. Supongamos que $R' > R$ y sea x_2 un número real tal que $R < |x_2| < R'$.

Luego, $\sum a_n x_2^n$ es divergente y $\sum n a_n x_2^{n-1}$ absolutamente convergente. (E)

Además, $\sum n a_n x_2^n$ es convergente. (F)

Ahora, si n es cualquier número entero positivo, se tiene

$$|a_n x_2^n| \leqslant n |a_n x_2^n| = |x_2| |n a_n x_2^{n-1}|$$

Por lo tanto, $\sum a_n x_2^n$ es convergente. (G)

Hecho que claramente contradice (E).

Por lo tanto, el supuesto $R' > R$ es falso. Luego, $R' = R$. ■

Ejercicio 28.3. *Justificar, cada uno de los pasos etiquetados con las letras (A), (B), (D), (E), (F) y (G); en la demostración precedente.*

Teorema 28.2. *Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$, tiene radio de convergencia positivo, y si*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 \cdots$$

en el intervalo de convergencia S, entonces en el interior de este intervalo, f es continua, derivable e integrable. Además, la derivada y la primitiva de f en S vienen dadas por:

1) $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-a)^{n-1}$

2) $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\frac{(x-a)^3}{3}\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$

Nota 28.2. Las series de potencias e (1) y (2) del teorema precedente, pueden ser convergentes en los extremos del intervalo S.

Nota 28.3. Observar que las relaciones (1) y (2) del teorema precedente, establecen que:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(a_n(x-a)^n\right)$$

y

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t-a)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^x a_n(t-a)^n\,dt$$

Nota 28.4. Aplicando (1) reiteradamente, se obtiene la relación

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}$$

Además como f es continua,

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to x_0}\left[a_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0-a)^n,\ \text{con } x_0\in S.$$

Ejemplo 28.3. *Verificar que*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad en\ \ S =]-1,1].$$

Solución: Como $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ en $]-1,1[$.
Integrando:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{28.3}$$

El Teorema (28.2) garantiza la igualdad (28.3) en $]-1,1[$. Por lo tanto, se debe estudiar la validez en los extremos:
En $x=-1$, la igualdad (28.3) no es valida, pues la función $\ln(1+x)$ no está definida en este punto.
En $x=1$, la serie es la serie armónica, que por el criterio de Leibniz es convergente.
Por lo tanto,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,\ \text{en }]-1,1].$$

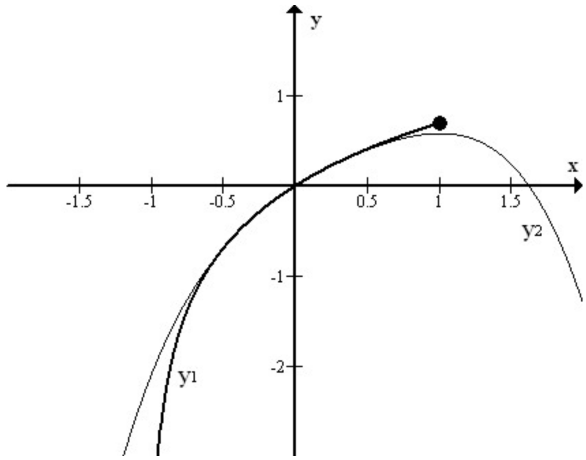

Gráfico de $y_1 = \ln(1+x)$ *e* $y_2 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Ejemplo 28.4. *Calcular la suma de la serie (de constantes) armónica alternada:*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Solución: En el ejemplo (28.3) se obtuvo que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \text{ en }]-1,1].$$

Sustituyendo en esta serie $x = 1$, donde 1 es un punto de su intervalo de convergencia, se tiene:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Ejemplo 28.5. *Usando el resultado precedente, calcular aproximadamente* $\ln(2)$. *Indicar el error cometido.*

Solución: Usando la serie alternada obtenida de $ln(2)$, sabemos que el error de su suma al calcular s_n viene dado por $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Por razones prácticas, se aproxima el valor buscado considerando $n = 10$. Luego,

$$\ln(2) \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{10} = 0.6456349206$$

y el error es menor que $\frac{1}{11} \approx 0.09090$.

Ejercicio 28.4. *Usando el resultado del ejemplo (28.3), encontrar un valor aproximado de* $\ln(3)$.

Ejemplo 28.6. *Encontrar la serie de potencias, centrada en* 0 *de* $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ *y su respectivo intervalo de convergencia.*

Solución: Es claro que:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]$$

Del ejemplo (28.3):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad \text{en }]-1,1]. \tag{28.4}$$

Para $\quad x \in]-1,1[\quad$ sustituyendo x por $-x$ en la serie (28.4):

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots \quad \text{en} \quad [-1,1[.$$

Luego:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{en} \quad]-1,1[\,.$$

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{en} \quad]-1,1[\,.$$

$$\frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{en} \quad]-1,1[\,.$$

Por lo tanto,

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{en} \quad]-1,1[\,.$$

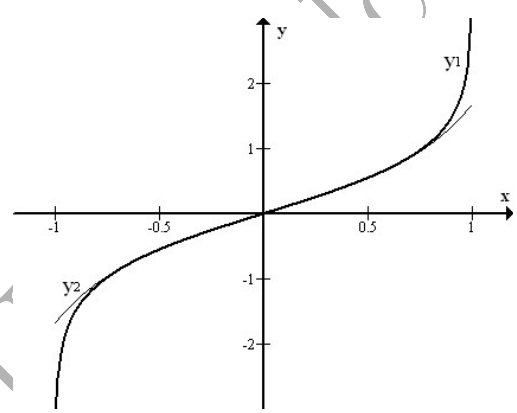

Gráfico de $y_1 = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ *e* $y_2 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}$

28.5 Autoevaluación

1) Encontrar una representación en series de potencias, centrada en el origen, para cada una de las siguientes funciones. Indicar, en cada caso, su radio e intervalo de convergencia.

   a) $x^3 \arctan x$ b) $\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ c) $\dfrac{x - \arctan x}{x^3}$

2) Con los resultados precedentes:

   a) Encontrar un valor aproximado de $\int_0^1 x^3 \arctan x dx$, usando los 4 primeros términos no nulos de la serie de $x^3 \arctan x$. Acotar el error cometido.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^3}$.

Solución:

1) a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1}$, $R = 1$, $S = [-1, 1]$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n (n+1) x^{n+2}$, $R = \frac{1}{2}$, $S =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+3}$, $R = 1$, $S = [-1, 1] \setminus \{0\}$

2) a) 0.1616161616, 0.00856 b) $\frac{1}{3}$

28.6 Desafío

La fuerza de gravedad sobre un objeto de masa m, a una altura h sobre la superficie de la tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la tierra y g es la aceleración debida a la gravedad.

1) Expresar F como una serie de potencias en $\frac{h}{R}$.

2) Observar que si se aproxima F mediante el primer término de la serie, se obtiene la expresión $F \approx mg$, que es lo que se emplea normalmente cuando h en mucho menor que R.

3) Usando $R = 6400km$, calcular el intervalo de valores de h para el cual la aproximación $F \approx mg$, tiene un error menor al 1%.