Sesión 29

Series de Taylor

Temas	**Capacidades**
✓ Series de Taylor. ✓ Series de MacLaurin	▷ Conocer y determinar series de Taylor de funciones. ▷ Conocer y determinar series de Maclaurin de funciones.

29.1 Introducción

B. Taylor
Inglés. (1685 - 1731).

Como se revisó en la sesión precedente, se dispone de diferentes métodos para encontrar la serie de potencias de una función: cambio de variable, método algebraico y métodos del cálculo. El problema es que todos estos métodos tienen algo en común: requieren partir de series de potencias de funciones previas. Este aspecto, se transforma en una gran debilidad al momento de intentar buscar una serie de potencias de una función que no se relaciona con las ya conocidas. En esta sesión se revisa una manera de determinar la serie de potencias de una función, que solamente hace uso de la función involucrada.

29.2 Un problema inicial

Sea $y = f(x)$ una función C^∞ (es decir, f y todas su derivadas existen y son continuas), supongamos que f viene representada por una serie de potencias del tipo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{29.1}$$

en el intervalo $]-R, R[$.
Aquí surge naturalmente una pregunta: ¿qué relación existe entre la función f y los coeficientes de la serie de potencias que la representa?.

Veamos, sustituyendo x por 0 en (**??**), se tiene que $\boxed{a_0 = f(0)}$.

Ahora, derivando ambos lados de (**??**) se tiene:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} \tag{29.2}$$

de donde $\boxed{a_1 = f'(0)}$.

Ahora, derivando ambos lados de (**??**) se tiene:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \tag{29.3}$$

de donde $\boxed{a_2 = \frac{f''(0)}{2}}$.

Ahora, derivando ambos lados de (**??**) se tiene:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} \tag{29.4}$$

de donde $\boxed{a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}}$.

Siguiendo estos cálculos se llega a que:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \tag{29.5}$$

así, entonces, se ha encontrado una relación especial entre una función y los coeficientes de una serie de potencias que la representa. Observar que se ha usado la notación $f^0 = f$.

Nota 29.1 En el caso de considerar una serie de potencias centrada en a, la relación (??) se transforma en

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Teorema 29.1 *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$*, tiene radio de convergencia positivo, y si* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$*, entonces* $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$*, para* $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Demostración. Ver problema inicial. ∎

29.3 Definición de serie de Taylor

Si f una función C^∞ en un intervalo abierto que contenga al punto $x = a$. Entonces, se llama *serie de Taylor de f en $x = a$* a la siguiente serie de potencias:

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En particular, cuando $a = 0$, la serie de Taylor de f recibe el nombre de *Serie de Maclaurin*, es decir, la serie de Maclaurin de f es:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejemplo 29.1 *Determinar las serie de Maclaurin de la función* $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Solución: En primer lugar se calculan las derivadas de f:

$$\begin{array}{ll}
f^{(0)}(x) = (1+x)^{1/2} & f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-1/2} \\
f^{(2)}(x) = -\dfrac{1}{2^2}(1+x)^{-3/2} & f^{(3)}(x) = \dfrac{1\cdot 3}{2^3}(1+x)^{-5/2} \\
f^{(4)}(x) = -\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}(1+x)^{-7/2} & f^{(5)}(x) = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5}(1+x)^{-9/2} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Estos resultados nos indican (haciendo un análisis cuidadoso) que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n}(1+x)^{-(2n-3)/2}$$

Notar que la relación precedente solamente es válida para $n \geq 1$.

Luego, la serie de Maclaurin de f:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)!!\, x^n}{2^n n!}$$

donde se ha usado la notación $n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

Nota 29.2 Aquí surge una interrogante clave. Si f es C^∞, ¿bajo que condiciones su serie de Taylor la representa? y ¿donde?. A continuación se muestra un ejemplo *especial* y luego un teorema que entrega una respuesta a la interrogante.

Ejemplo 29.2 *Considerar la función:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Hallar su serie de Maclaurin.

2) Comentar.

Solución: Para calcular $f'(0)$, se usa la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \overset{L'Hopital}{=} 0$$

Luego,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Procediendo de manera análoga se obtiene que, en general, $f^{(n)}(0) = 0$. Luego, la serie de MacLaurin de $f(x)$ es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Luego, la serie de Maclaurin de $f(x)$ solo la representa en ¡$x = 0$!.
Comentario: El hecho que, una función tenga su serie de Taylor en un punto, desgraciadamente, no garantiza que ella represente a la función en algún intervalo en torno a dicho punto.

29.4 Definición de fórmula de Taylor con resto

Si $f^{(n)}$ existe en cada punto de un intervalo abierto I, que contiene al punto $x = a$. Entonces, la *Fórmula de Taylor con resto* para la función f en cada punto x de I es:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

La expresión $R_n(x)$ es llamada el *resto después de n términos.* Este resto se puede expresar de distintas maneras, una de ellas, es la siguiente *forma de Lagrange*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-a)^n$$

donde ξ_n es un punto que se encuentra entre x y a.

Teorema 29.2 *Si I es un intervalo que contiene a $x = a$, en cual f y todas sus derivadas existen, y si x_0 es un punto de I, entonces la serie de Taylor para f en $x = a$ representa a f en $x = x_0$ siempre y cuando:*

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x_0) = 0$$

Ejemplo 29.3 *Encontrar la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \sin x$ y establecer el intervalo en el cual dicha serie la representa.*

Solución: Haciendo los primeros cálculos, se obtiene:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

De donde se deduce que:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, la serie de Maclaurin de $\sin x$ solo contiene las potencias impares:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{29.6}$$

A continuación, se estudia el intervalo en el cual se cumple (**??**).
Para ello sea $R > 0$ y x en $]-R, R[$. Usando el teorema precedente:

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n)}(\xi_n)|}{n!}|x|^n \leq \frac{|x|^n}{n!} < \frac{R^n}{n!}$$

y como $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R^n}{n!} = 0$, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Luego, que la igualdad (**??**) es válida en todo $x \in]-R, R[$. Ahora bien, como R es arbitrario (**??**) es válido para todo número real x. Es decir, la serie de Maclaurin de $\sin x$ representa esta función en todo $\mathbb{R}$.

Nota 29.3 Haciendo un trabajo similar, se obtiene que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

con intervalo de convergencia $\mathbb{R}$. Observar que este resultado, también se puede obtener derivando (**??**)

Ejercicio 29.1 *Verificar que la serie de Maclaurin de e^x es:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y que esta igualdad es válida en todo $\mathbb{R}$.

Nota 29.4 A continuación se entrega un listado, con las series de potencias de más frecuente uso, con sus correspondientes intervalos de convergencia.

Teorema 29.3 Serie de potencias de uso frecuente

1) $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Intervalo de convergencia: $-1 < x < 1$

2) $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Intervalo de convergencia: $-1 < x < 1$

3) $$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m}{n} x^n$$

donde $\dbinom{m}{n} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$ y $m \in \mathbb{R}$

Intervalo de convergencia: $-1 < x < 1$

4) $\ln x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$

Intervalo de convergencia: $0 < x \leq 2$

5) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

Intervalo de convergencia: $-1 < x \leq 1$

6) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Intervalo de convergencia: $-\infty < x < \infty$

7) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \dfrac{x^{11}}{11!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Intervalo de convergencia: $-\infty < x < \infty$

8) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \dfrac{x^{10}}{10!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Intervalo de convergencia: $-\infty < x < \infty$

9) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \dfrac{x^{11}}{11} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$

Intervalo de convergencia: $-1 < x < 1$

Ejemplo 29.4 *A partir de la serie de potencias de la función e^x, determinar la serie de potencias del seno hiperbólico:*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Solución: Como se sabe: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, en $\mathbb{R}$.
Como el intervalo de convergencia de la serie e^x es todo $\mathbb{R}$, se puede sustituir x por $-x$, luego

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \ldots \text{en } \mathbb{R}$$

Luego sumando las series de e^x y $-e^{-x}$; se tiene.

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \ldots \quad \text{en } \mathbb{R}$$

De donde, finalmente,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

Ejemplo 29.5 *Dada la función $f(x) = \sin x^2$, se pide:*

1) *Encontrar su serie de MacLaurin y su respectivo intervalo de convergencia.*
2) *Usando los tres primeros términos de esta serie, calcular aproximadamente $\int_0^1 f(x)dx$.*
3) *¿ Qué error se comete en dicho cálculo ?*

Solución:

1) Como $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad$ en $\mathbb{R}$.

   Se tiene que:
$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

2) Por propiedades de las series de potencias:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin x^2 dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots \right) dx \\
&= \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^{14}}{7!} dx + \ldots \\
&\approx \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} \right) \Bigg|_0^1 \\
&\approx 0.2102813
\end{aligned}$$

   Ahora como para series alternadas: $|S - S_3| \leq a_4$.

   y el cuarto término de la serie de $\sin x^2$ es

$$\int_0^1 \frac{x^{14}}{7!} = \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} \Bigg|_0^1 \approx 0.0000013 < 0.00001.$$

   Luego, el error cometido al calcular la integral propuesta es menor que 0.00001, es decir el valor encontrado, 0.3102813, es exacto hasta el cuarto decimal.

Ejemplo 29.6 *Usando series de potencia, calcular*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right).$$

Solución: Se sabe que la serie de MacLaurin de la función $\sin x$ es:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

De donde:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots \quad x\neq 0.$$

Luego:

$$\frac{\sin x}{x}-1=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots \quad x\neq 0.$$

De donde

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+\dots \quad x\neq 0.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+\dots\right)=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}.$$

29.5 Autoevaluación

Dada la función $f(x)=\frac{\sin x - x}{x^3}$, se pide:

1) Determinar la serie de Maclaurin de $f(x)$.

2) Usando la serie encontrada, calcular el valor de $f^{(48)}(0)$, es decir, el valor de la 48-ava derivada de f evaluada en 0.

3) Usando la serie encontrada, calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4) Usando los tres primeros términos no nulos de la serie encontrada, determinar una valor aproximado de $\int_0^1 f(x)dx$. Acotar el error cometido.

Solución:

1) $f(x)=\frac{\sin x - x}{x^3}=-\frac{1}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^4}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n+3)!}$

2) Como se quiere calcular la derivada de orden 48, este valor se obtiene para $n=24$. Luego, $\frac{f^{(48)}(0)}{48!}=(-1)^{25}\frac{1}{51!}$. De donde $f^{(48)}(0)=-\frac{48!}{51!}=-124980$.

3) $-\frac{1}{6}$

4) $-0.1639285714,\ 4.592886537 \cdot 10^{-7}$.

29.6 Desafío

Buscando una fórmula para el término general de la sucesión de Fibonacci.

Recordar que la sucesión de Fibonacci, (a_n), definida por recurrencia, es:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3$$

1) Comprobar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2$

2) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + \cdots$. Utilizando la prueba del cuociente, probar que la serie precedente converge si $|x| < \frac{1}{2}$

3) Comprobar que si $|x| < \frac{1}{2}$, entonces: $f(x) = \frac{-1}{x^2+x-1}$.

   Sugerencia: La relación anterior puede escribirse como $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$.

4) Descomponer $\frac{1}{x^2+x-1}$ en fracciones parciales, y usando la serie de potencias de $\frac{1}{x-a}$, obtener otra serie de potencias para $f(x)$.

5) Finalmente, usando que las dos series de potencias de $f(x)$ deben ser idénticas, deducir que el término general de la sucesión de Fibonacci, viene dado por:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

6) Construir una tabla de valores para los primeros términos de la sucesión precedente, para confirmar que efectivamente ella corresponde al término general de la sucesión de Fibonacci.