Sesión 22

Introducción a series

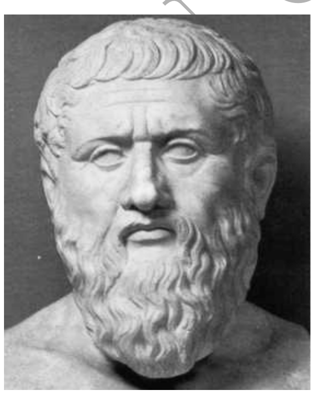
Temas

- ✓ Definición de serie.
- ✓ Sucesión de sumas parciales asociada a una serie.
- ✓ Definición de serie convergente, divergente.

Capacidades

- ▷ Conocer y comprender la definición de serie.
- ▷ Decidir la convergencia o divergencia de series, mediante el estudio de la sucesión de sumas parciales.

22.1 Introducción



Zenon de Elea
Griego (490 AC - 425 AC)

En esta sesión se inicia el estudio del tema de *series*, que trata *sumas de una cantidad infinita de términos*.
El problema de sumas infinitas viene de la época de los griegos, cuando Zenón (siglo V AC) planteó varias situaciones, conocidas como Paradojas, que desafiaban el sentido común, destacándose las paradojas sobre el movimiento que desconcertaron a los matemáticos por siglos.
El problema de estas paradojas era que involucraban una suma de un número infinito de términos positivos.

Muchos matemáticos contribuyeron al desarrollo de las series, entre los que se destacan: Newton, Leibniz, Euler y D'Alambert.

22.2 Problema

Dada una sucesión de números reales (a_n). Para cada $n \in N$, se sabe lo que significa sumar los n primeros términos de dicha sucesión, suma que se denota:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

o también como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

En esta sesión se intentará sumar **todos** los términos de la sucesión:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

¿Qué significado o qué sentido tiene sumar una cantidad infinita de términos?

Ejemplo 22.1. $\dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1000} + \ldots = ?$

Esta suma parece familiar, ya que $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$, se puede escribir como:

$$0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$$

suma que representa al número decimal periódico $0,333...$ denotado $0.\overline{3}$.
Esta suma infinita debería representar al número racional $\frac{1}{3}$.
Por lo tanto, se debería tener que:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \frac{1}{3}$$

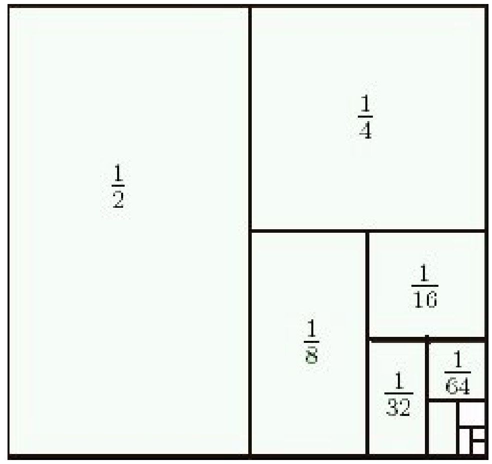
Ejemplo 22.2. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = ?$

Al parecer, esta suma infinita no se puede calcular, es decir, no es un número real. En efecto:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{1} +2}_{3} +3}_{6} +4}_{10} + \ldots n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \ldots$$

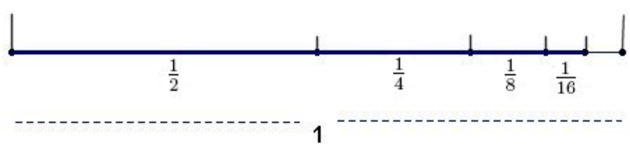
Ejemplo 22.3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots = ?$

- Observar la figura:



$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$

- Otra manera de visualizar la misma suma anterior:
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$
Observar la figura:



¿Qué se puede conjeturar respecto de la suma infinita $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$?

- Una forma *numérica* de *visualizar* la suma
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$
es completando una tabla de sumas de los n primeros términos:

n	Suma de los n primeros términos	Valor de la suma
1	$\frac{1}{2}$	0.5
2	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	0.75
3	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	0.875
4	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	0.9375
5	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	0.96875
6	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$	0.984375
7	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$	0.9921875
...	...	...

Al *parecer* la suma infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ es el número real 1. Esto se podría escribir:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

Ejercicio 22.1. *Sea* $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$.
Verificar que S *podría* tener los valores 0, 1 y $\frac{1}{2}$.

22.3 Definición de serie

Sea (a_n) una sucesión de números reales. La expresión:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots$$

recibe el nombre de *serie* (o *serie infinita*), y se denota usualmente por: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

o simplemente: $\sum a_n$. Es decir:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots}$$

Nota 22.1.

- Los números a_1, a_2, ... se llaman términos de la serie.
- Para algunas series conviene comenzar con $n=0$. Por ello, es usual escribir una serie como $\sum a_n$.

22.4 Sucesión de sumas parciales

Para estudiar una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se consideran las siguientes sumas:

$$\begin{aligned}
&S_1=a_1\\
&S_2=a_1+a_2\\
&S_3=a_1+a_2+a_3\\
&\vdots\\
&S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Estas sumas forman una sucesión (S_n), llamada *sucesión de sumas parciales* asociada a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. La sucesión (S_n) puede o no tener un límite (finito), cuando n tiende a $+\infty$.

22.5 Definición de serie convergente

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sea (S_n) la sucesión de sumas parciales, donde:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

- Cuando la sucesión de sumas parciales (S_n) converge a un número real S^*, es decir, si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S^*$, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*, y la suma de la serie es S^*. Esto se escribe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^*$$

- Cuando la sucesión de sumas parciales (S_n) es divergente, se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.

Ejemplo 22.4. Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

La sucesión de sumas parciales es:

$$\begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} \\ S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ \vdots \\ S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \\ \vdots \end{array}$$

Como:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

se concluye que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge y que su suma es 1, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Ejemplo 22.5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es ¿convergente o divergente?.

Solución. La sucesión de sumas parciales asociada a la serie es:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1 + 2\\
&S_3 = 1 + 2 + 3\\
&\vdots\\
&S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{n(n+1)}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

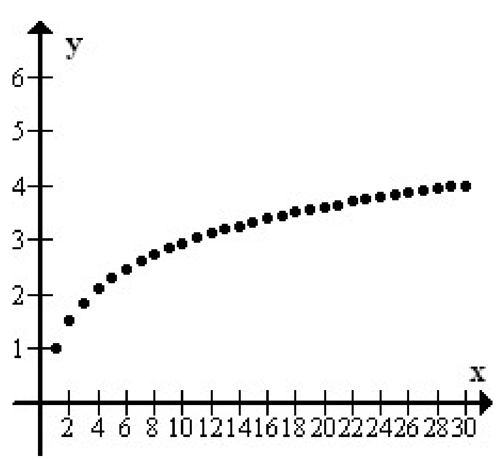
Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente.

Ejemplo 22.6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es ¿convergente o divergente?.

Solución. La sucesión de sumas parciales asociada a la serie es:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = 1\\
&S_2 = 1 + \tfrac{1}{2}\\
&S_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\\
&S_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\\
&\vdots\\
&S_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{n}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

La figura muestra la gráfica de los 30 primeros términos de la sucesión de sumas parciales S_n:



Considerar la sub-sucesión (S_{2^n}):

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2}$

$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}$

$\vdots$

Calculando S_{16}, S_{32}, etc, se deduce que: $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

Luego, $\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$.

Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

22.6 Autoevaluación

a) Explicar el significado de: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$.

b) Determinando al menos los 6 primeros términos de la sucesión de sumas parciales, decidir si cada serie es convergente o divergente:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

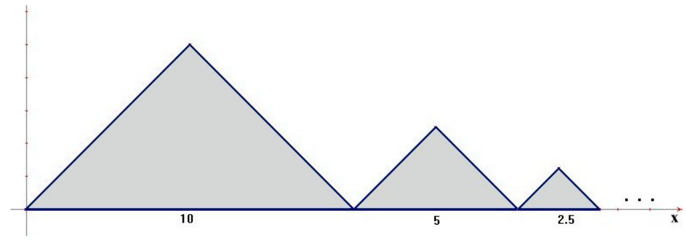
c) Dada la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.15 + 0.0015 + 0.000015 + 0.00000015 + \ldots$, determinar a_n, verificar que la serie es convergente y calcular la suma de la serie.

d) Si la n-ésima suma parcial de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $S_n = \dfrac{2n}{n+1}$. Determinar a_n y el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si es que existe.

Respuestas:
a) La serie es convergente, la sucesión de sumas parciales asociada a la serie es convergente y su límite es 7, la suma de la serie es 7. b) (1) Es divergente; (2) es convergente y la suma es 1. c) $a_n = \frac{15}{100^n}$, la suma de la serie es $\frac{5}{33}$. d) $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$, la serie es convergente y la suma es 2.

22.7 Desafío

Con base en el semi-eje positivo de las abscisas se dibuja una sucesión de triángulos rectángulos e isósceles, como se muestra en la figura:

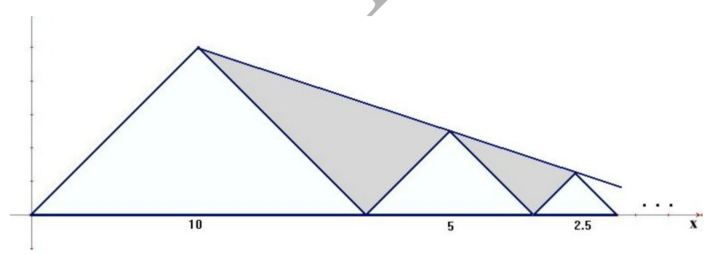


La base del primer triángulo mide 10 unidades, la del segundo 5 unidades, ... la base de cada triángulo siguiente mide la mitad de la base del triángulo inmediatamente anterior.
Si se continúa indefinidamente, calcular si es posible,

1) el área total que ocupan todos los triángulos.

2) la suma de los perímetros de todos los triángulos.

Si se consideran ahora, los siguientes triángulos (achurados):



intentar el cálculo de la suma de sus áreas y perímetros.