Sesión 23

Series especiales

Temas

- ✓ Series geométricas.
- ✓ Series p.
- ✓ Series telescópicas.

Capacidades

- ▷ Conocer las series especiales: series geométricas, series p y series telescópicas.
- ▷ Estudiar el comportamiento de las series especiales.
- ▷ Calcular la suma de ciertas series especiales convergentes.

23.1 Introducción

Gregory Saint-Vincent Belga (1584 - 1667)

En esta sesión se estudian tres series especiales: series geométricas, series p, y series telescópicas. En la historia de las series se encuentra el jesuita Grégory de Saint-Vicent, matemático y geómetra del siglo XVII, quien en su obra *Opus geometricum* publicada en 1647, presenta un estudio de las series geométricas incluyendo diversas aplicaciones.
Un estudio sobre la noción de convergencia de series, y una demostración de la divergencia de la serie armónica (una p-serie) se encuentra en la obra *Tractatus de Seriebus Infinitas*, del matemático suizo Jacob Bernoulli en el año 1689. En esta obra presentó la suma de algunas series, logrando reducirlas a series geométricas o telescópicas.

23.2 Dos problemas fundamentales

En el estudio de series (numéricas) se plantean dos problemas fundamentales:

- Decidir la convergencia o divergencia de una serie.
- En el caso que sea convergente, calcular el valor de su suma

Hasta el momento, para determinar si una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente o divergente, debemos recurrir a la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ asociada a la serie.

De acuerdo a lo tratado en la sesión anterior:

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente $\Longleftrightarrow$ la sucesión de sus sumas parciales (S_n) es convergente.

y si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S^*$, donde S^* es un número real, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S^*$.

En esta sesión, se estudiarán tres series especiales, se establecerá en qué casos son convergente, y para algunas se determinará el valor de la suma.

23.3 Definición de Serie geométrica

Sean a y r números reales, $a \neq 0$. La serie:

$$\boxed{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} ar^n}$$

recibe el nombre de *serie geométrica* de razón r y *primer término* a.

Ejemplo 23.1. Un primer ejemplo de serie geométrica

Estudiar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1.5^n$.

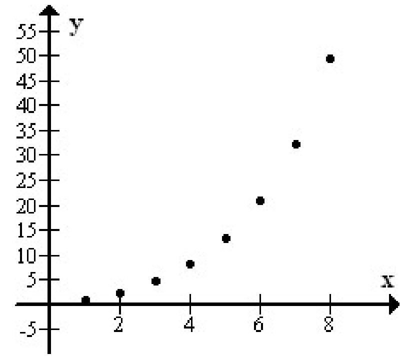
Solución

Sucesión (a_n)*:* $a_n = 1.5^n$

Sucesión de sumas parciales (s_n) asociada a la serie:

$$s_n = 1 + 1.5 + 1.5^2 + \ldots 1.5^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 1.5^k$$

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 1.5 = 2.5$
$s_3 = 1 + 1.5 + 1.5^2 = 4.75$
$s_4 = 1 + 1.5 + 1.5^2 + 1.5^3 = 8.125$
$s_5 = 1 + 1.5 + 1.5^2 + 1.5^3 + 1.5^4 = 13.1875$
$s_6 = 1 + 1.5 + 1.5^2 + 1.5^3 + 1.5^4 + 1.5^5 = 20.7812$
$\vdots$



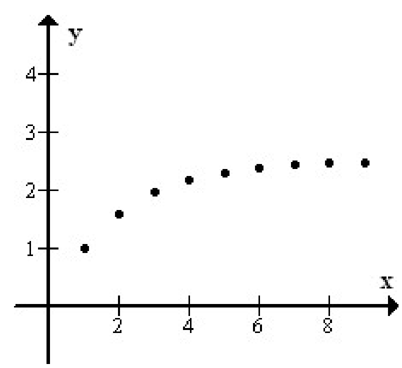
Al parecer, la sucesión de sumas parciales s_n es divergente. Si así fuere, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1.5^n$ es divergente.

Ejemplo 23.2. *Un segundo ejemplo de serie geométrica*

Estudiar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 0.6^n$.
Solución
Sucesión (a_n)*:* $a_n = 0.6^n$
Sucesión de sumas parciales (s_n) asociada a la serie:

$$s_n = 1 + 0.6 + 0.6^2 + \ldots 0.6^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 0.6^k$$

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 0.6 = 1.6$
$s_3 = 1 + 0.6 + 0.6^2 = 1.96$
$s_4 = 1 + 0.6 + 0.6^2 + 0.6^3 = 2.176$
$s_5 = 1 + 0.6 + 0.6^2 + 0.6^3 + 0.6^4 = 2.3056$
$\vdots$
$s_{10} = 2.484883456$
$s_{20} = 2.499908596$
$s_{30} = 2.499999447$
$\vdots$



Al parecer, la sucesión de sumas parciales s_n es convergente. Si así fuere, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 0.6^n$ es convergente, y la suma es aproximadamente 2.5.

23.3.1 Estudio de la serie geométrica

Como la serie geométrica es:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$$

con a y r números reales, $a \neq 0$. Es claro que:

- Sucesión de sumas parciales: $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$
- Una fórmula para S_n:
  - $*$ Caso $r \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
& & S_n &= a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \\
&\text{multiplicando por } r: & r\,S_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \\
&\text{restando se obtiene:} & (1-r)S_n &= a - ar^n \\
&\text{de donde :} & S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}
\end{aligned}
$$

  - $*$ Caso $r = 1$: $S_n = na$
- ¿Cuándo (S_n) es convergente?

  Cuando $|r| < 1$ se tiene que $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$. Luego, para $|r| < 1$ la sucesión S_n es convergente, y $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$. Para $|r| \geqslant 1$, la sucesión S_n es divergente.

El siguiente teorema resume el criterio para estudiar el comportamiento de series geométricas.

Teorema 23.1. Criterio para estudiar series geométricas:

a) La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ converge, si y solo si, $|r| < 1$.

   Cuando la serie geométrica converge, su suma viene dada por $\frac{a}{1-r}$, es decir, $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

b) La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ diverge, si y solo si, $|r| \geqslant 1$.

Observaciones.

- En general, la suma de una serie geométrica convergente es igual a $\boxed{\frac{\text{primer término}}{1-\text{razón}}}$.
- Cuando $|r| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ es convergente, y $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

  Y, cuando $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ es divergente.
- En particular, para $r = 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a = a + a + a + a + \ldots$ es divergente.

Ejemplo 23.3. *En base al criterio para estudiar series geométricas, se tiene:*

a) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1.5^n$ es divergente ($r = 1.5 > 1$).

b) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 0.6^n$ es convergente $(r = 0.6)$, y $\sum_{n=0}^{+\infty} 0.6^n = \frac{1}{1-0.6} = 2.5$.

c) La serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica, con $r = \frac{1}{2}$. Esta serie es convergente, y su suma es $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

d) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 5\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ es geométrica convergente y su suma es $\frac{5}{1-\frac{-2}{3}} = 3$.

Ejercicio 23.1. Determinar el comportamiento de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{3^{2n-1}}$ (convergente o divergente). En caso de ser convergente, hallar su suma.

Ejercicio 23.2. ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$ es convergente?

23.4 Definición de serie p

Sea $p > 0$. La serie:

$$\boxed{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}}$$

se llama serie p.

23.4.1 Un ejemplo de serie p: la serie armónica

Para $p = 1$, se obtiene la serie p; $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Esta serie recibe el nombre de *serie armónica** La serie armónica es divergente (demostrado en la sesión anterior).

Teorema 23.2. La serie p, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$,

a) Converge si $p > 1$

b) Diverge si $0 < p \leqslant 1$

Nota 23.1. El teorema anterior sólo permite analizar la convergencia o divergencia de una serie p. En caso de ser convergente, no entrega el valor de la suma.

Ejemplo 23.4. *Estudiar la convergencia o divergencia de cada serie:*

a) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie p convergente $(p = 2)$.

b) La serie $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es una serie p divergente $(p = \frac{1}{2})$.

* Recibe este nombre porque la longitud de onda de los sobretonos de una cuerda que vibra es proporcional a 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc.

23.5 Definición de serie telescópica

Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se dice *telescópica*, cuando existe una sucesión (b_n) de modo que

$$\boxed{a_n = b_n - b_{n+1}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Nota 23.2. Una serie telescópica puede ser de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$, o de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_{n+1} - b_n)$.

Teorema 23.3. Convergencia de una serie telescópica.
La serie telescópica $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ es convergente, si y sólo si, existe $\lim_{n\to+\infty} b_n$ finito, y cuando esto ocurre, el valor de la serie es $\sum_{k=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Demostración
Considerar la sucesión de sumas parciales asociada a la serie:

$$\begin{aligned}
S_1 &= b_1 - b_2 \\
S_2 &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = b_1 - b_3 \\
S_3 &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4 \\
&\vdots \\
S_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}
\end{aligned}$$

Luego, la sucesión (S_n) es convergente, si y solo si, existe $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$ finito. ■

Ejemplo 23.5. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ es convergente, y calcular su suma.

Solución
La serie dada es una serie telescópica. La sucesión de sumas parciales asociada a la serie es: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Como $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, luego, la serie dada es convergente y:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Ejemplo 23.6. Estudiar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$, y en caso de ser convergente, calcular su suma.

Solución

Descomponiendo $\dfrac{1}{9n^2-3n-2}$ en suma de fracciones parciales se obtiene:

$$\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{3(3n-2)}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

La serie dada es una serie telescópica. La sucesión de sumas parciales es:

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3n+1)}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{1}{3}$, luego, la serie dada es convergente y:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{3}$$

Ejercicio 23.3. Analizar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

23.6 Autoevaluación

1) Determinar si cada una de las siguientes series es convergente o divergente. En caso de ser convergente, calcular su suma, si es posible.

(a) $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{2^6}+\cdots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-0.2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{1-n}5^{n/2}$

(d) $1+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\dfrac{1}{5\sqrt[3]{5}}\cdots$

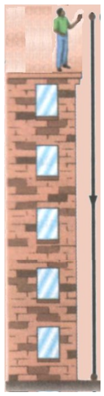
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n+1}-\cos\frac{1}{n+2}\right)$

f) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 9}+\cdots$

2) Encontrar los valores de q tal que la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1-3q)^n$ sea convergente, y para dichos valores de q, hallar la suma en términos de q.

Respuestas:
(1a) Serie geométrica convergente; la suma es $\frac{4}{5}$. (1b) Serie geométrica convergente; suma aproximadamente 5.516. (1c) Serie geométrica divergente. (1d) Serie p ($p=\frac{4}{3}$) convergente. 1e) Serie telescópica convergente; Suma: ≈ -0.4596. (1f) Serie telescópica convergente; Suma: -0.5. (2) Cuando $0<q<\frac{2}{3}$, la serie es convergente, y en estos casos la suma es: $\frac{1}{3q}$

23.7 Desafío



Se deja caer una pelota desde una cierta altura, la que rebota sucesivas veces.

La altura que alcanza en cada bote es igual a las cuatro quintas partes de la altura alcanzada en el bote anterior.

¿Desde que altura se dejó caer la pelota al comienzo, si la *distancia vertical* total recorrida por la pelota, hasta quedar en reposo, fue de 99 metros?.