

Propiedades y Criterios I

Temas

- ✓ Propiedades fundamentales de las series.
- ✓ Criterio del límite del término general.
- ✓ Criterios de comparación directa y comparación en el límite, para series de términos positivos.

Capacidades

- ▷ Conocer y aplicar las propiedades fundamentales de las series.
- ▷ Conocer y aplicar el criterio del término general para decidir la divergencia de una serie.
- ▷ Conocer y aplicar dos criterios de comparación para estudiar el comportamiento de series de términos positivos.

24.1 Introducción



Augustin Cauchy
Francés (1789 - 1857)

En general, es un problema decidir cuando una serie es convergente o divergente. Para resolver este problema se han establecido criterios de convergencia, los que están estrechamente vinculados con el cálculo de límites de sucesiones.

En esta sesión se estudiarán las propiedades principales de las series y dos criterios de comparación para decidir el comportamiento de algunas series. En el tema de series, no se puede dejar de mencionar a uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, A. Cauchy, quien realizó importantes aportes en el tema de convergencia de series. De hecho, varios criterios de convergencia de series llevan su nombre.

24.2 Propiedades fundamentales de las series

- **Propiedad 1.** Si la serie $\sum a_n$ converge (diverge) y $k \neq 0$, entonces la serie $\sum ka_n$ también converge (diverge).

Es usual expresar esto diciendo que las series $\sum a_n$ y $\sum ka_n$ *tienen el mismo comportamiento*.

Además, en caso de convergencia:

$$\sum ka_n = k \sum a_n$$



Ejemplo 24.1 Estudiar el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n} = 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}}_{\text{diverge}} \implies \text{la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n} \text{ es divergente}$$

- **Propiedad 2.** Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes con sumas L y M respectivamente, entonces las series $\sum(a_n + b_n)$ y $\sum(a_n - b_n)$ son convergentes, y:

$$\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n = L \pm M$$



Ejemplo 24.2 Estudiar el comportamiento de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$.

Solución

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ es una serie geométrica convergente
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica convergente.

Luego, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ es convergente.

Nota 24.1 Para la serie del ejemplo anterior, se puede calcular el valor de su suma. Se deja como ejercicio calcular el valor de esta serie.

Propiedad 3. Si se modifica el valor de un número finito de términos de una serie, el comportamiento de la serie no cambia.

En particular, si se suprime, o se agrega, un número finito de términos o sumandos, el comportamiento de la serie no cambia.

Nota 24.2 Para algunas series, que son convergentes, se puede además calcular su suma. Tener presente que, puede cambiar el valor de la suma, respecto del valor de la serie conocida, de donde proviene.

**Ejemplo 24.3**

- a) La serie $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, ya que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.
 b) La serie $\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ es convergente, ya que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ es convergente.

Además, se puede calcular el valor de la suma de la serie. En efecto:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 + \left(\frac{3}{5}\right)^5 + \dots = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{27}{50}$$

24.3 Criterios de convergencia I

El siguiente teorema es llamado *Teorema del límite del término general*, o *Condición necesaria de Cauchy*.

Teorema 24.1 Condición necesaria de Cauchy

Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$.

Demostración

Si la serie $\sum a_n$ converge, entonces $\lim S_n$ existe (finito), donde S_n es la sucesión de sumas parciales de $\sum a_n$. Sea $\lim S_n = S^*$, con $S^* \in \mathbb{R}$.

Ahora bien como $a_n = S_n - S_{n-1}$, se tiene que

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S^* - S^* = 0 \quad \blacksquare$$

Nota 24.3 El teorema (24.1) presenta una *condición necesaria* para que una serie sea convergente, *pero no suficiente*. Es decir:

- Para que una serie $\sum a_n$ sea convergente, es necesario que $\lim a_n = 0$.
- Si el término general de la serie no tiende a cero, entonces la serie no puede ser convergente.

Por ejemplo:

- a) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n$ no es convergente, ya que $\lim (-2)^n$ no existe.
 b) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3n^2+5}$ no es convergente, ya que $\lim \frac{n^2}{3n^2+5} = \frac{1}{3} \neq 0$.

- Sin embargo, si se cumple que $\lim a_n = 0$, este hecho no permite decidir la convergencia de la serie $\sum a_n$.



Ejemplo 24.4 La serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, aunque $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Nota 24.4 Del teorema del *límite del término general*, se obtiene un criterio para decidir la divergencia de ciertas series, enunciado en el siguiente corolario:

**Corolario 24.3.1** Criterio del término general para que una serie sea divergente

Si $\lim a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.



Ejemplo 24.5 Estudiar el comportamiento de la serie $\sum \frac{7n^2+5n}{(n+3)^2}$.

Solución

Como $\lim \frac{7n^2+5n}{(n+3)^2} = 7$, luego, la serie $\sum \frac{7n^2+5n}{(n+3)^2}$ es divergente.



Ejemplo 24.6 Estudiar el comportamiento de la serie $\sum \frac{2^n}{n^2}$.

Solución

- Aplicando la regla de L'Hopital, se obtiene: $\lim \frac{2^n}{n^2} = +\infty$
- Luego, la serie $\sum \frac{2^n}{n^2}$ es divergente.



Ejercicio 24.1 Estudiar el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

24.3.1 Series de términos positivos

Nota 24.5 Dada una serie de términos positivos $\sum a_n$, donde $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (o, para todo n mayor que un número natural n_0), se tiene que, la sucesión de sumas parciales asociada a la serie, es una sucesión creciente.

Los criterios para decidir el comportamiento de *ciertas* series de términos positivos que serán tratados son:

- Criterio de comparación directa.
- Criterio de comparación en el límite.
- Criterio de la razón.
- Criterio de la raíz.
- Criterio de la integral

En esta sesión se tratarán los dos primeros criterios.

Nota 24.6 Se denomina *criterio* de convergencia o divergencia, a todo teorema que nos permite estudiar el comportamiento (convergencia o divergencia) de una serie.

Nota 24.7 Para aplicar criterios para estudiar el comportamiento de una serie, es *clave* tener presente algunas series y su comportamiento, en particular, las series especiales.

24.3.2 Criterio de comparación directa



Teorema 24.2 Criterio de comparación directa

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (o, para todo n mayor que un número natural n_0), entonces:

- a) Si $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.
- b) Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge.

Demostración

(a) La sucesión de sumas parciales (S_n) asociada a la serie $\sum a_n$, es una sucesión de términos positivos creciente, ya que $S_n < S_{n+1}$, y es acotada superiormente por $\sum b_n$, ya que la serie $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$. Por lo tanto se concluye que, la serie $\sum a_n$ converge.

(b) Análoga. ■



Ejemplo 24.7 Estudiar el comportamiento de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5+7^n}$.

Solución

- Sean $a_n = \frac{1}{5+7^n}$, $b_n = \frac{1}{7^n}$.
- $\frac{1}{5+7^n} < \frac{1}{7^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n}$ es una serie geométrica convergente.

Luego, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5+7^n}$ es convergente.

24.3.3 Criterio de comparación en el límite



Teorema 24.3 Criterio de comparación en el límite

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos.

Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$, donde L es un número real positivo, entonces las dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo comportamiento (ambas convergen o divergen simultáneamente).

Demostración Como $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$, se tiene que para n suficientemente grande: $L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2}$. De donde

$$\frac{L}{2}b_n < a_n < \frac{3L}{2}b_n$$

De esta doble desigualdad y aplicando el Teorema 24.3, se obtienen los resultados requeridos. ■

Observación. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos.

- Si $\sum b_n$ es convergente y $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces $\sum a_n$ también convergente.
- Si $\sum b_n$ es divergente y $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $\sum a_n$ también es divergente.

Nota 24.8 En los criterios de comparación, la idea es *comparar* una serie dada con una serie conocida, para la cual se conoce su comportamiento, convergente o divergente.



Ejemplo 24.8 Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5n+7}$ converge o diverge, usando comparación en el límite.

Solución

La serie dada se va a comparar con la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Sean $a_n = \frac{1}{5n+7}$, y $b_n = \frac{1}{n}$.

- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{5n+7} = \frac{1}{5}$ es un número real positivo
- Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, luego, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5n+7}$ es divergente.



Ejemplo 24.9 Probar que la serie p : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Demostración

Sean $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$

- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$
- Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ es una serie telescópica convergente, luego, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.



Ejemplo 24.10 Analizar el comportamiento de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5+7^n}$, usando comparación en el límite. (Esta serie ya fue estudiada usando comparación directa).

Solución

Sean $a_n = \frac{1}{5+7^n}$, y $b_n = \frac{1}{7^n}$.

- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{5+7^n}}{\frac{1}{7^n}} = \lim \frac{7^n}{5+7^n} = \frac{1}{5+7^n} = 1 > 0$.
- Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n}$ es convergente, luego la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5+7^n}$ es convergente.



Ejemplo 24.11 Estudio de algunas series, cuyo comportamiento se puede decidir usando el criterio de comparación en el límite:

Serie en estudio $\sum a_n$	Serie de comparación $\sum b_n$	Criterio $\lim \frac{a_n}{b_n}$	Conclusión sobre la serie en estudio
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2 + 5n - 1}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{3}$	converge
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+7}}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	1	diverge
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3 + n - 1}{2n^7 - 9n}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$	1	converge
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$	$+\infty$	diverge
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	0	converge

24.4 Autoevaluación

1) Determinar la veracidad o falsedad de cada enunciado. Justificar su respuesta.

- Sea $\sum a_n$ es una serie de términos positivos. Si $\sum a_n$ es convergente entonces $\sum a_n^2$ es convergente.
- Sea $\sum a_n$ es una serie de términos positivos. Si $\sum a_n$ es convergente entonces $\sum \sqrt{a_n}$ es convergente.
- Si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n^2 = 0$.
- Si $\lim a_n = 0$, entonces $\sum a_n$ es convergente.
- Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos convergente, entonces $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge.
- Sea $\sum a_n$ es una serie de términos positivos. Si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ es convergente.
- Si $\sum a_n$ es una serie convergente y $\sum b_n$ es una serie divergente, entonces $\sum (a_n + b_n)$ es divergente.

2) Determinar, si es posible, el comportamiento de cada serie:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{n^3+8}$ | b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{3^{n+1}}$ | c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ |
| d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^3+8}$ | e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5n^4-3}}{7+4n^6}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{3^n+2}$ |

- 3) Determinar el comportamiento de cada serie, y en caso de ser convergente, hallar su suma

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n+1}}{2^{2n}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{3^{n+2}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

Solución:

- 1) (a) V (b) F (c) V (d) F (e) V (f) V (g) V
 2) (a) Diverge (b) Diverge (c) Diverge (d) Converge (e) Converge (f) Converge
 3) (a) C!, $\frac{44}{5}$ (b) C!, $\frac{7}{18}$ (c) D!

↕ 24.5 Desafío

Analizar el comportamiento de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot n^3}$$

y si es convergente, calcular su suma.