Sesión 25

Criterios II

Temas	Capacidades
✓ Criterio del cuociente.	▷ Conocer y aplicar el criterio del cuociente.
✓ Criterio la raíz.	▷ Conocer y aplicar el criterio de la raíz.
✓ Criterio de la integral.	▷ Conocer y aplicar el criterio de la integral.

25.1 Introducción

Jean d'Alembert
Francés (1717 - 1783)

Los criterios de comparación de series, ya tratados, requieren encontrar *otra serie* con la cual deben comparar. Sin embargo, existen otros criterios que dependen solo de la serie que se estudia.
En esta sesión se estudiarán otros criterios para series de términos positivos: criterio del cuociente o criterio de D'Alambert, criterio de la raíz o de Cauchy, y el criterio de la integral.
Estos criterios, los de comparación y los nuevos que serán tratados, sólo permiten estudiar el comportamiento de la serie, converge o diverge, y no el valor de su suma en caso de ser convergente.

25.2 Criterios de convergencia II

25.2.1 Criterio del cuociente

Teorema 25.1. Criterio del cuociente o criterio D'Alembert.
Sea $\sum a_n$ *una serie de términos positivos, tal que:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Se tiene que:

a) *Si* $0 \leqslant L < 1$ *entonces la serie es convergente.*

b) *Si* $L > 1$ *o* $L = +\infty$ *entonces la serie es divergente.*

c) *Si* $L = 1$*, el criterio no decide.*

Demostración

a) $L < 1$:

Sea k un número real tal que $L < k < 1$. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

entonces existe un número natural N suficientemente grande tal que: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$, para todo $n \geqslant N$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{N+1}}{a_N} < k \quad &\Longrightarrow \quad a_{N+1} < k \cdot a_N \\
\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < k \quad &\Longrightarrow \quad a_{N+2} < k \cdot a_{N+1} < k^2 a_N \\
\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < k \quad &\Longrightarrow \quad a_{N+3} < k \cdot a_{N+2} < k^3 a_N \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Luego, $a_{N+p} < k^p a_N$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Ahora, por Criterio de comparación, como la serie $\sum k^p a_N$ converge (serie geométrica con razón k menor que 1), se tiene que la serie $\sum a_n$ converge.

b) $L > 1$

Existe un número natural M tal que: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, para todo $n \geqslant M$.

Luego: $a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \ldots$, sucesión cuyo límite no es 0.

Por el criterio del término general, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Nota 25.1. Este criterio no decide el comportamiento de una serie cuando el límite $L = 1$. Por ejemplo, para ambas series $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$, se obtiene $L = 1$, sin embargo, la primera diverge y la segunda converge.

Nota 25.2. Se sabe que el comportamiento de una serie no cambia, si se modifica una cantidad finita de términos. Considerando este hecho, las series serán denotadas en la forma $\sum a_n$.

Ejemplo 25.1. *Determinar si la serie* $\sum \frac{n}{2^n}$ *converge, usando el criterio del cuociente.*

Solución

- $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \dfrac{(n+1)2^n}{n\,2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n}$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$

Luego, la serie $\sum \frac{n}{2^n}$ es convergente.

Ejemplo 25.2. *Estudiar el comportamiento de la serie* $\sum \dfrac{n^n}{n!}$, *usando el criterio del cuociente.*

Solución

- $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \dfrac{(n+1)^n\,(n+1)\,n!}{n^n\,(n+1)!} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$

Luego, la serie $\sum \dfrac{n^n}{n!}$ es divergente.

Ejercicio 25.1. *Usando el resultado recién obtenido, calcular* $\lim \frac{3n!+2n^n}{5n^n}$.

Ejercicio 25.2. *Estudiar el comportamiento de cada serie:*

(a) $\sum \frac{1}{(2n-1)2^n}$ b) $\sum n^3\, e^{-n}$

25.2.2 Criterio de la raíz

Teorema 25.2. Criterio de la raíz o criterio de Cauchy.
Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos, tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Se tiene que:

a) *Si $0 \leqslant L < 1$ entonces la serie es convergente.*

b) *Si $L > 1$ o $L = +\infty$ entonces la serie es divergente.*

c) *Si $L = 1$, el criterio no decide.*

Demostración

a) $0 < L < 1$

Como $\lim \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, para n suficientemente grande:

$$\sqrt[n]{a_n} < k < 1$$
$$\Downarrow$$
$$a_n < k^n$$

Como la serie geométrica $\sum k^n$ converge, luego la serie $\sum a_n$ converge.

Nota. Para $L = 0$, se procede de manera similar.

b) $L > 1$

Como $\lim \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, para n suficientemente grande: $\sqrt[n]{a_n} > 1$, luego $a_n > 1$. Por lo tanto, la serie $\sum a_n$ diverge.

Nota 25.3. El criterio de la raíz no permite decidir respecto del comportamiento de una serie cuando el límite $L = 1$. Por ejemplo, las series $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$, son tales que $L = 1$. Sin embargo, la primera diverge y la segunda converge.

Ejemplo 25.3. *Determinar si la serie* $\sum \dfrac{5}{(\ln n)^n}$ *converge usando el criterio de la raíz.*

Solución

- $a_n = \dfrac{5}{(\ln n)^n} \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{5}{(\ln n)^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{5}}{\ln n}$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{5}}{\ln n} = 0 < 1$

Luego, la serie $\sum \dfrac{5}{(\ln n)^n}$ es convergente.

Ejemplo 25.4. *Estudiar el comportamiento de la serie* $\sum \dfrac{n}{e^n}$.

Solución

- $a_n = \dfrac{n}{e^n} \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n}{e^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{e}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{e} = \frac{1}{e} < 1$

Luego, la serie $\sum \dfrac{n}{e^n}$ es convergente.

Ejemplo 25.5. *Estudiar el comportamiento de la serie* $\sum \left(\frac{cn+4}{4n+3}\right)^n$ *para diversos valores de* c *no negativos.*

Solución

- $a_n = \left(\dfrac{cn+4}{4n+3}\right)^n \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{cn+4}{4n+3}\right)^n} = \dfrac{cn+4}{4n+3}$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{cn+4}{4n+3} = \frac{c}{4}$

Luego:

a) La serie converge cuando $0 \leqslant \dfrac{c}{4} < 1$, es decir, para $0 \leqslant c < 4$

b) La serie diverge cuando $c > 4$

c) Para $c = 4$, el criterio de la raíz no decide el comportamiento de la serie. Para este caso, verificar que el criterio del término general decide su comportamiento.

25.2.3 Criterio de la integral

Teorema 25.3. Criterio de la integral.
Sea $y = f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, +\infty[$, y sea:

$$a_n = f(n)$$

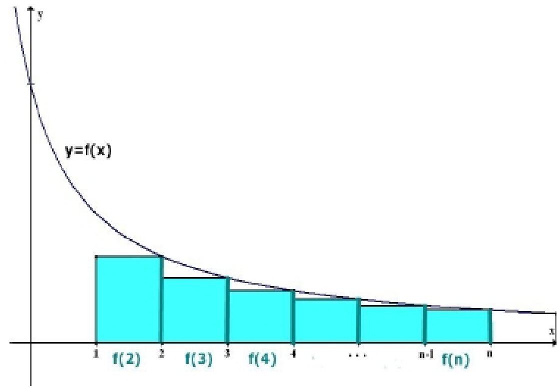
Se tiene que:

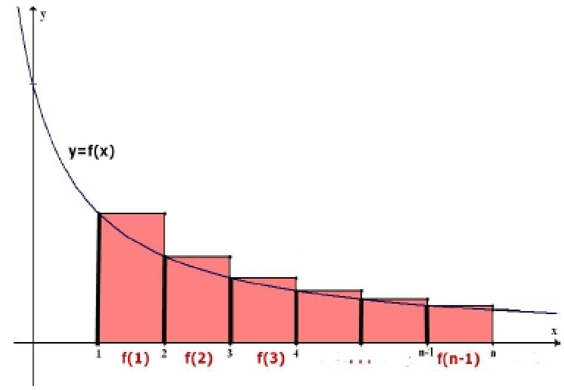
a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente.

o, equivalentemente

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente

Demostración





Comparando las figuras se tiene:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

equivalente a:

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

de donde:

$$S_n - a_1 \leqslant T_n \leqslant S_n$$

Como ambas sucesiones, S_n y T_n, son crecientes, y ambas son acotadas superiormente o ambas no lo están, entonces ambas tienen límite finito, o bien ambas tienen límite $+\infty$. Luego, ambas son convergentes, o ambas son divergentes,

Nota 25.4. El criterio de la integral no requiere iniciar la serie en $n = 1$.

Ejemplo 25.6. *Estudiar la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$*, usando el criterio de la integral.*

Solución

- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es continua y positiva en $[1, \infty[$.

  f es decreciente en $[1, \infty[$, ya que $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ para todo $x > 1$.

- $$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right|_1^t = \frac{1}{2} \lim_{t\to+\infty} \big(\ln(t^2+1) - \ln 2\big) = +\infty$$

- Luego, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ es divergente.

Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

Ejemplo 25.7. Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, usando el criterio de la integral.

Solución

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty[$ (verificarlo).
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{atan} x \Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\operatorname{atan} t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
- Luego, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$ es convergente.

Por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge.

Nota 25.5. El criterio de la integral sólo decide el comportamiento de una serie, **no** dice que la suma de la serie sea el valor de la integral.
Por ejemplo, puede verificar que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$ es convergente y su suma es $\frac{1}{e-1}$, y la integral impropia $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{e}$.

Ejercicio 25.3. *Probar, usando el criterio de la integral, que la serie p: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, (siendo p positivo), convergen para $p > 1$, y divergen para $p \leqslant 1$.*

Ejemplo 25.8. *Estudiar el comportamiento de la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

Solución

- $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^3}$ es continua, positiva y decreciente en $[2, \infty[$ (verificarlo).
- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{2(\ln x)^2}\Big|_2^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{2\ln(2)^2} - \frac{1}{2\ln(t)^2}\right) = \frac{1}{2\ln(2)^2}$
- Luego, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ es convergente.

Ejercicio 25.4. *Probar que la serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ *es divergente.*

25.3 Autoevaluación

1) Determinar el comportamiento de cada serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\cdot 0.5^{n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2-1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$

2) Los términos de la serie se definen por la regla de recurrencia:

$$a_1 = 2 \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}\, a_n.$$

Determinar el comportamiento de la serie $\sum a_n$.

3) Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{3^{n-1}}$ es convergente, y calcular su suma.

Respuestas:

1) a) Convergente b) Divergente c) Convergente
d) Convergente e) Divergente f) Convergente

2) Divergente

3) Su suma es $\frac{39}{4}$

25.4 Desafío

¿Para qué valores de x, con $\frac{x+2}{x-1} > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$ es convergente?