Sesión 20

Sucesiones I

Temas

- ✓ ¿Qué es una sucesión?
- ✓ Notaciones y conceptos relacionados.
- ✓ Maneras de presentar una sucesión.
- ✓ Gráfico de sucesiones.

Capacidades

- ▷ Conocer y comprender el concepto de sucesión.
- ▷ Conocer y manejar las diferentes maneras de presentar una sucesión: fórmula general, sus primeros términos y por recurrencia.
- ▷ Conocer y manejar las notaciones y conceptos relacionados con sucesiones.
- ▷ Conocer y determinar gráficos de sucesiones.

20.1 Introducción

Leonardo Fibonacci. Italiano. (1170-1250)

Como se recordará, en el curso de Cálculo I, se estudiaron las funciones de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{R}$, donde $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$, generalmente ha sido un intervalo. Con estas funciones hemos trabajado hasta el momento.
En esta unidad estudiaremos, desde el punto de vista del Cálculo, unas funciones especiales llamadas *sucesiones*. Las sucesiones, tienen la particularidad que su dominio son los números naturales.

20.2 Definición de sucesión

Informalmente, una sucesión, a, es una secuencia infinita ordenada de números.

$$a: \quad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Formalmente,

> Una sucesión a es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, es decir:
>
> $$\begin{array}{rl} a: & \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & n \mapsto a(n) = a_n \end{array}$$

Nota 20.1. Con respecto a las sucesiones, se tiene:

1) La imagen de n a través de la sucesión $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, se designa por a_n, y recibe el nombre de *término general* o *término n-ésimo* de la sucesión. Así por ejemplo: a_1 es su primer término, a_2 es su segundo término, etc.

2) La sucesión $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, usualmente se designa por $(a_n)_{n\in \mathrm{IN}}$, o simplemente (a_n), o bién $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$.

3) Como una sucesión es una función, todos los conceptos estudiados sobre funciones, se aplican también a las sucesiones. Así, por ejemplo:

    a) El *rango* o *recorrido* de (a_n), es $\{a_n \in \mathbb{R} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$

    b) (a_n) es una sucesión *acotada superiormente*, si su rango es un conjunto acotado superiormente, es decir, si existe un $K \in \mathrm{IR}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$:
    $$a_n < K$$

    c) (a_n) es una sucesión *acotada inferiormente*, si su rango es un conjunto acotado inferiormente, es decir, si existe un $k \in \mathrm{IR}$ tal que para todo $n \in \mathrm{IN}$:
    $$a_n > k$$

    d) (a_n) es una sucesión *acotada*, si su rango es un conjunto acotado, es decir, si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:
    $$|a_n| < M$$

    e) (a_n) es una sucesión *creciente*, si a medida que n crece, a_n también, es decir, cuando para todo n se cumple:
    $$a_n \leqslant a_{n+1}$$

f) (a_n) es una sucesión *decreciente*, si a medida que n crece, a_n decrece, es decir, cuando para todo n se cumple:

$$a_n \geqslant a_{n+1}$$

g) (a_n) es una sucesión *monótona* si (a_n) es *creciente* o *decreciente*.

Ejemplo 20.1. A continuación se revisan algunos ejemplos de sucesiones.

1) $a_n = \frac{1}{n}$. En este caso, es claro que:
$a_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = \frac{1}{5}, \quad a_6 = \frac{1}{6}, \quad \ldots$
es decir:
$$(a_n) = \left(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{6}, \ldots\right)$$

2) $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. En este caso:
$b_1 = (-1)^1 \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = (-1)^2 \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad b_3 = (-1)^3 \frac{3}{3+1} = -\frac{3}{4}, \quad \ldots$
es decir:
$$(b_n) = \left(-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ -\tfrac{3}{4}, \ldots\right)$$

3) $c_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$. Aquí:
$c_1 = \frac{(-1)^1+1}{2} = 0, \quad c_2 = \frac{(-1)^2+1}{2} = 1, \quad c_3 = \frac{(-1)^3+1}{2} = 0, \quad c_4 = \frac{(-1)^4+1}{2} = 1, \quad \ldots$
es decir,
$$(c_n) = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots)$$

4) $d_n = \frac{2^n}{n!}$. Aquí:
$d_1 = \frac{2^1}{1!} = 2, \quad d_2 = \frac{2^2}{2!} = 2, \quad d_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3}, \quad d_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}, \quad \ldots$
es decir:
$$(d_n) = \left(2,\ 2,\ \tfrac{4}{3},\ \tfrac{2}{3}, \ldots\right)$$

Ejercicio 20.1. *Determinar el término general de las siguientes sucesiones:*
a) $0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999,\ \ldots$ b) $2,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5},\ \frac{8}{7},\ \ldots$

Ejercicio 20.2. *Dada la sucesión:* $(y_n) = (1, 16, 81, 256, \ldots)$. *¿Cuál de los dos términos generales que siguen la representa?.*

$$y_n = n^4 \qquad\qquad y_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24.$$

¿Qué conclusión se puede extraer de esta situación?

Nota 20.2. Como se ha visto, una sucesión se puede definir por su *fórmula general* o por sus primeros términos. Existe otra manera, de presentar una sucesión: *por recurrencia*. Por ejemplo, la siguiente sucesión (de Fibonacci*) está definida por recurrencia:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ y\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \text{para } n \geqslant 3$$

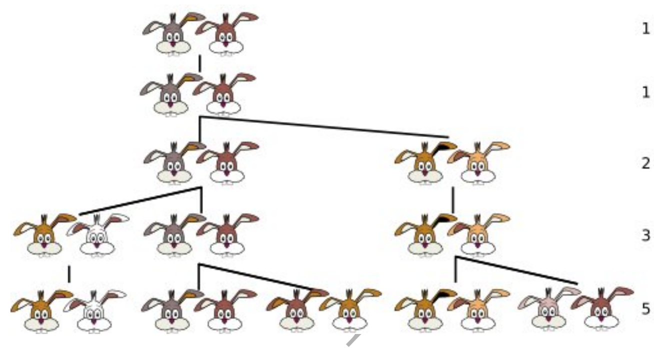
claramente, sus primeros términos son:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$$

Nota 20.3. Jacques Philippe Binet (Francés, 1786-1856), descubrió una fórmula general para la sucesión de Fibonacci:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que interviene en la fórmula de Binet, es el llamado *número dorado*.



20.3 Gráfico de sucesiones

Como es de suponer el gráfico de una sucesión (a_n) es el conjunto de puntos del plano dado por

$$\{(n, a_n) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$$

A continuación se entregan los gráficos de dos funciones:

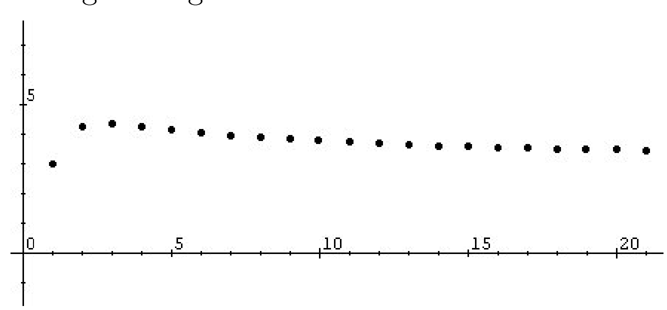


Gráfico de $a_n = 3\sqrt[n]{n}$

* Un hombre pone un par de conejos, un macho y una hembra, en un lugar rodeado por murallas. Los conejos pueden aparearse a partir del primer mes de vida, y las hembras dan a luz luego de un mes de gestación. Supongamos que ningún conejo muere en un año, y que las hembras siempre dan a luz una pareja de conejos, un macho y una hembra, cada mes a partir de su segundo mes de vida. Entonces, ¿cuántos pares de conejos habrá en un año?

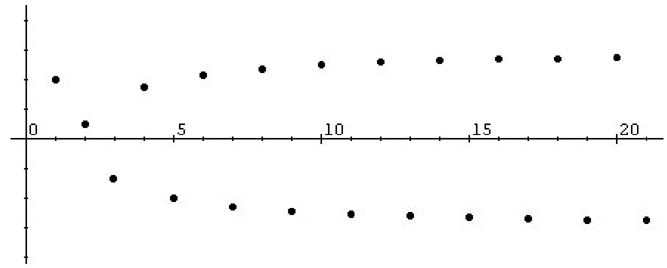


Gráfico de $b_n = (-1)^n \frac{3n-5}{n}$

20.4 Definición de función asociada a una sucesión

Sea (a_n) una sucesión. Si $y = f(x)$ es una función que cumple:

- $[1, +\infty[\subseteq Dom(f)$
- $\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) = a_n$

entonces, $y = f(x)$ recibe el nombre de *función asociada* a la sucesión a_n.

Nota 20.4. Sea $y = f(x)$ la función asociada a la sucesión a_n. Si para $x \geqslant 1$, $y = f(x)$ es creciente (decreciente, acotada superiormente, acotada inferiormente, acotada), entonces a_n también es creciente (decreciente, acotada superiormente, acotada inferiormente, acotada).

Por ejemplo, la función asociada a la sucesión $a_n = \frac{5}{n}$ es $a(x) = \frac{5}{x}$. Observar las diferencias entre los gráficos de la sucesión (a_n) y su función asociada.

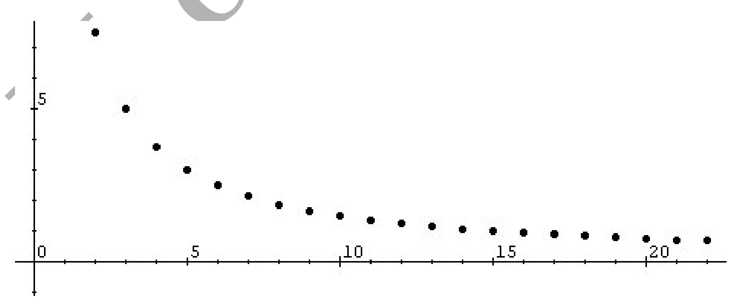


Gráfico de a_n

Gráfico de la función asociada

Ejemplo 20.2. *Verificar que la sucesión $a_n = \frac{\ln n}{n}$ es decreciente para $n \geqslant 3$.*

Solución:Sea $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, para $x \geqslant 3$, la función asociada a (a_n). Como $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ y $f'(x) < 0$ para $x \geqslant 3$, se tiene f es decreciente para $x \geqslant 3$. Luego, (a_n) es decreciente.

Nota 20.5. Observar que, en el ejemplo precedente se ha usado que, si la función asociada es decreciente, entonces la sucesión correspondiente también lo es. ¿Es válido el recíproco?.

20.5 Autoevaluación

1) Encontrar una fórmula para el término general de la siguiente sucesión definida por recurrencia:
$$a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

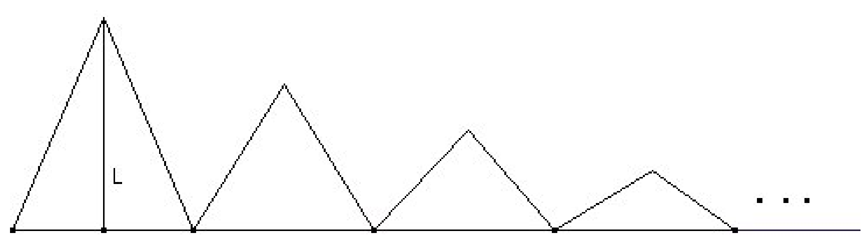
2) Verificar que la sucesión $a_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ es creciente.

3) Comprobar que la sucesión (b_n) definida por recurrencia: $b_1 = \sqrt{2}$; $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$, $n \geqslant 1$, es creciente y acotada superiormente.

Solución:1) $a_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}}$ 2) Si $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ es la función asociada, $f'(x) > 0$, para $x > 1$. Luego, f es creciente. Por lo tanto, a_n es creciente. En este caso, se puede chequear directamente que $a_n < a_{n+1}$. ¡Hágalo!. 3) Verificar, usando inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N}: \; b_{n+1} \geqslant b_n$ (creciente) y $b_n \leqslant 2$ (acotada superiormente).

20.6 Desafío

Sobre una recta se construyen, uno a continuación de otro, una sucesión de triángulos. Cada uno de ellos tiene como base un segmento de longitud $1\,cm$ y como altura los $\frac{4}{5}$ de la altura del triángulo inmediatamente anterior.



Si el primer triángulo tiene una altura de $L\,cm$, determinar una fórmula (reducida) para el área del n-ésimo triángulo y una fórmula (reducida) para la suma de las áreas de los primeros n triángulos.