

Sesión 21

Sucesiones II

Temas

- ✓ Límites de sucesiones. Sucesiones convergentes.
- ✓ Sucesiones divergentes.

Capacidades

- ▷ Conocer y manejar conceptos de sucesiones convergentes y divergentes.
- ▷ Conocer las principales propiedades de las sucesiones convergentes.
- ▷ Calcular límites de sucesiones.

21.1 Introducción



*Agustín Cauchy.
Francés. (1789-1857)*

Luego de revisar el concepto de sucesión, junto a sus principales aspectos (notación, formas de presentación, gráficos, etc), en la sesión anterior, ahora se aborda el concepto clave en este tema, el de convergencia de sucesiones. El centro de esta sesión se encuentra en las principales propiedades de las sucesiones convergentes, junto al cálculo de límites de sucesiones.

También se comentan las sucesiones divergentes y el cálculo de sus *límites*.

Los aspectos revisados de sucesiones son claves para el siguiente tema: series.

👁 21.2 Definición de límite de una sucesión.

Sea (a_n) una sucesión y $L \in \mathbb{R}$.

Informalmente, se dice que un número real L es el límite de (a_n) , cuando es posible hacer que a_n este tan cerca de L como se quiera, con tal de tomar n suficientemente grande. Es decir que, a medida que n crece, las imágenes a_n , se van acercando a L , de modo que las distancias entre a_n y L , $|a_n - L|$, se van acercando a 0.

Formalmente, L es el límite de (a_n) si y solo si

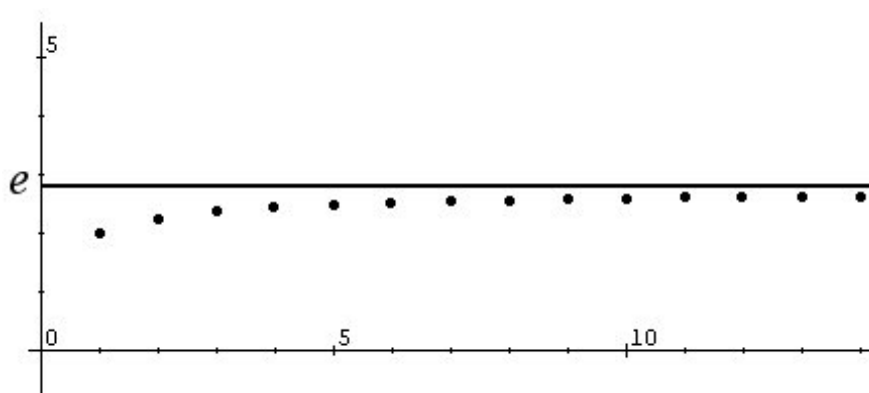
$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies |a_n - L| < \epsilon$$

Lo que anota, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$, o simplemente, $\lim a_n = L$

Nota 21.1.

- Cuando una sucesión tiene límite, ella se dice *convergente*. En caso contrario, ella se dice *divergente*.
- Cuando $\lim a_n = L$, se dice que a_n *converge a L* , o a_n *tiende a L* , o a_n *se aproxima a L* .

Gráficamente, cuando (a_n) converge a L , se tiene que el gráfico de los puntos de la sucesión se van acercando a la recta $y = L$. Por ejemplo, el límite de la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, como veremos más adelante, es igual al número $e \approx 2.71828$. A continuación se entrega el gráfico de ésta sucesión junto a la recta $y = e$.



Representación gráfica de la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

**Teorema 21.1.** *Propiedades de las sucesiones convergentes*

- 1) Si una sucesión converge, su límite es único.
- 2) Toda sucesión convergente es acotada.
- 3) El límite de una sucesión constante, es la misma constante; es decir, si $a_n = k$, entonces:

$$\lim a_n = k$$

- 4) Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergentes con límites L y M respectivamente, entonces:

- a) La sucesión $(k \cdot a_n)$ es convergente y:

$$\lim k \cdot a_n = k \cdot \lim a_n = k \cdot L$$

- b) Las sucesiones $(a_n \pm b_n)$ también son convergentes y

$$\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = L \pm M$$

- c) La sucesión producto $(a_n \cdot b_n)$ también es convergente y

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n = L \cdot M$$

- d) La sucesión cociente $(\frac{a_n}{b_n})$, donde b_n y su límite M son distintos de 0, también es convergente y

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{L}{M}$$

- 5) Si $\lim a_n = 0$ y (b_n) es una sucesión acotada, entonces $\lim a_n \cdot b_n = 0$

- 6) Teorema del *sandwich*:

Si $\lim a_n = \lim c_n = L$ y (b_n) es una sucesión tal que a partir de un cierto número natural N cumple que $a_n \leq b_n \leq c_n$, entonces $\lim b_n = L$.

- 7) Si $\lim a_n = L$ y $\lim b_n = M$, entonces:

$$\text{a) } \lim b_n^{a_n} = M^L, \quad b_n > 0, M > 0$$

$$\text{b) } \lim \log_b a_n = \log_b L, \quad a_n > 0, L > 0, b > 0, b \neq 1$$

- 8) Toda sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) es convergente.

9) Si $y = f(x)$ es una función asociada a (a_n) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \implies \lim a_n = L$$



Ejemplo 21.1. Dado $a_n = \frac{5n^2+2n-3}{2n^2-3n+2}$, calcular, usando teoremas sobre límites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Solución: Como $\frac{5n^2+2n-3}{2n^2-3n+2} = \frac{n^2(5 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2})}{n^2(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})} = \frac{5 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2+2n-3}{2n^2-3n+2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim(5 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2})}{\lim(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})} = \frac{\lim 5 + \lim \frac{2}{n} - \lim \frac{3}{n^2}}{\lim 2 - \lim \frac{3}{n} + \lim \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{\lim 5 + 2 \lim \frac{1}{n} - 3 \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 2 - 3 \lim \frac{1}{n} + 2 \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{5 - 0 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$



Ejemplo 21.2. Probar que $\lim n \sin \frac{1}{n} = 1$.

Solución: Se puede verificar que para cada $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 : \cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$.

Poniendo $\alpha = \frac{1}{n}$ se tiene: $\cos \frac{1}{n} < \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} < 1$, o sea $\cos \frac{1}{n} < n \sin \frac{1}{n} < 1$ y como $\lim \cos \frac{1}{n} = 1$, se tiene, por *Teorema del Sandwich*, el resultado requerido.

Nota 21.2. Existen algunos límites, de frecuente aparición, que es conveniente tener presente. Ellos se resumen en el siguiente teorema.



Teorema 21.2. Sucesiones convergentes especiales

1) $\lim \frac{1}{n^k} = 0, \quad k > 0$

4) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim r^n = 0, \quad |r| < 1$

5) $\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$

3) $\lim \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$

6) $\lim n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a, \quad a > 0$



Ejemplo 21.3. Verificar que $\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

Como $\sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1 \right]^{\frac{1}{n}}$. Usando Límite especial número 2 y Teorema 21.1(7a), se obtiene el resultado.



Ejemplo 21.4. Dada la sucesión (b_n) definida por recurrencia:

$$b_1 = \sqrt{2}; \quad b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}, \quad n \geq 2.$$

Probar que

- 1) (b_n) es creciente.
- 2) (b_n) es acotada superiormente.
- 3) (b_n) es convergente. Calcular su límite.

Solución:

- 1) Se prueba que* $\forall n \in \mathbb{N} : b_{n+1} \geq b_n$.

Esta relación se comprueba usando *inducción matemática*. Lo primero es probar que la relación es válida para $n = 1$, es decir, probar que $b_2 \geq b_1$.

Como:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\geq 0 && / + 2 \\ 2 + \sqrt{2} &\geq 2 && / \sqrt{} \\ \sqrt{2 + \sqrt{2}} &\geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

se tiene que $b_2 \geq b_1$.

Hipótesis Inductiva: Suponer que la desigualdad es válida para $n = k$, es decir, que: $b_{k+1} \geq b_k$

Tesis Inductiva: Probar que la desigualdad es válida para $n = k + 1$, es decir que: $b_{k+2} \geq b_{k+1}$.

Demostración: Por hipótesis: $b_{k+1} \geq b_k$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\geq b_k && / + 2 \\ 2 + b_{k+1} &\geq 2 + b_k && / \sqrt{} \\ \sqrt{2 + b_{k+1}} &\geq \sqrt{2 + b_k} \end{aligned}$$

de donde: $b_{k+2} \geq b_{k+1}$.

2)

$$\begin{aligned} \text{Observando que : } b_1 &= \sqrt{2} \approx 1.4142 \\ b_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1.8477 \\ b_3 &= \sqrt{2 + b_2} \approx 1.9615 \\ b_4 &= \sqrt{2 + b_3} \approx 1.9903 \\ &\vdots \end{aligned}$$

* Ver Autoevaluación 20.5 (3)

Se *sospecha* que (b_n) es acotada superiormente por 2. Se comprueba usando inducción.

$n = 1$ $b_1 = \sqrt{2} \leq 2$ se cumple.

$n = k$. Se supone que $b_k \leq 2$ es verdadero.

$n = k + 1$. Por demostrar $b_{k+1} \leq 2$.

Para ello, como

$$\begin{aligned} b_k &\leq 2 & / + 2 \\ 2 + b_k &\leq 4 & / \sqrt{} \\ \sqrt{2 + b_k} &\leq 2 \\ b_{k+1} &\leq 2 \end{aligned}$$

se tiene que, $b_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- 3) De (a) y (b), (b_n) es creciente y acotada superiormente, luego por Teorema 21.1(8), es convergente.

Sea $L = \lim b_n$, de donde también $L = \lim b_{n+1}$, (¡comprobarlo!).

Como $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$. tomando límite y usando propiedades de límites, se tiene que, $L = \sqrt{2 + L}$ de donde $L^2 - L - 2 = 0$, es decir $L = 2$ o $L = -1$.

Como $b_n \geq 0$, se tiene que $L \geq 0$.

Luego $L = 2$, es decir $\lim b_n = 2$.

21.3 Sucesiones divergentes

Como ya se estableció al inicio de esta sesión, una sucesión se dice divergente, cuando ella no es convergente.



Ejemplo 21.5. A continuación se revisan, algunos comportamientos de sucesiones divergentes.

- 1) Consideremos la sucesión $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$, cuyos primeros términos son:
 $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$ Un gráfico de (a_n) es:

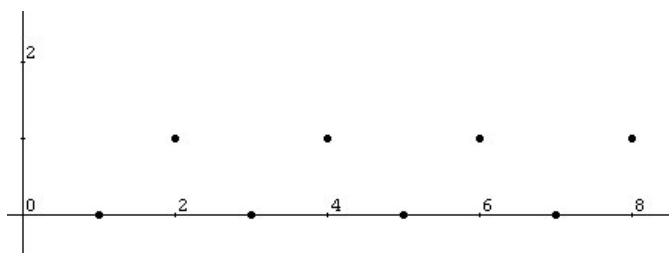


Gráfico de la sucesión $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$

Es claro, como esta sucesión va alternando sus valores entre 0 y 1, al crecer n , a_n no se va acercando a ningún número. Por lo tanto, no tiene límite, es decir, es divergente.

2) La sucesión $b_n = \frac{n^3}{n+1}$, tiene como primeros términos (aproximados) a:

0.5, 2.66, 6.75, 12.8, 20.83, 30.86, 42.87, 56.89, 72.9, 90.90, ...

y un gráfico de (b_n) es:

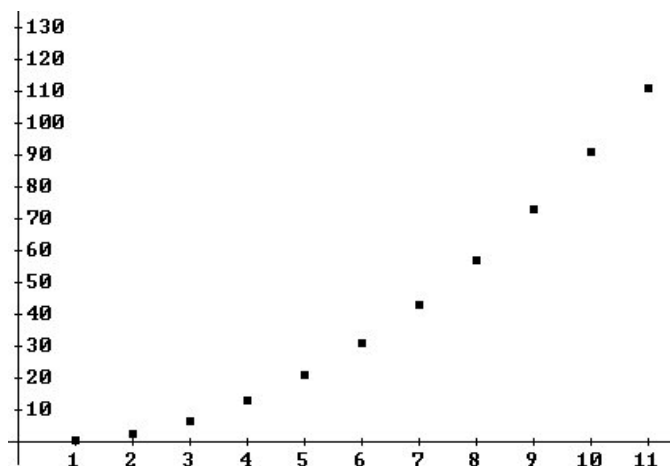


Gráfico de la sucesión $b_n = \frac{n^3}{n+1}$

Como a medida que n crece, (b_n) crece *sin cota*, esta sucesión es divergente.

👁 21.4 Sucesiones divergentes a $+\infty$ ($-\infty, \infty$)

Una sucesión (a_n) se dice divergente a $+\infty$ ($-\infty$), cuando a medida que n crece, a_n crece (decrece) sin cota.

Una sucesión (a_n) se dice divergente a ∞ cuando a medida que n crece, $|a_n|$ crece sin cota.



Ejemplo 21.6. Los siguientes ejemplos ilustran estas definiciones.

- 1) Las sucesiones $a_n = n^2$, $b_n = n^4 - 2n + 4$, $c_n = \frac{n^3}{n+1}$ divergen a $+\infty$.
- 2) Las sucesiones $a_n = -n^3$, $b_n = -n^3 - 2n + 4$, $c_n = \frac{-n^3}{n+1}$ divergen a $-\infty$.
- 3) Las sucesiones $a_n = n^2$, $b_n = -n^4 - 2n + 4$, $c_n = (-1)^n \frac{n^3}{n+1}$ divergen a ∞ .



Teorema 21.3. Sea $c_n = \frac{a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_pn^p}{b_0 + b_1n + b_2n^2 + \dots + b_qn^q}$, con $a_p \neq 0$ y $b_q \neq 0$.

Entonces:

$$\lim c_n = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } q > p \\ +\infty & \text{si } p > q \text{ y } \frac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{si } p > q \text{ y } \frac{a_p}{b_q} < 0 \end{cases}$$



21.5 Autoevaluación

- 1) Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias. Justificar su respuesta.
 - a) Si (a_n) y (b_n) divergen, entonces $(a_n + b_n)$ también diverge.
 - b) Si una sucesión de números positivos tiene límite L , entonces $L > 0$.
 - c) Si (a_n) y (b_n) son sucesiones tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\lim b_n = 0$, entonces $\lim a_n = 0$.
- 2) Calcular los límites de las siguientes sucesiones:
 - a) $a_n = \frac{5n^2+2n-3}{2n^2-3n+2}$
 - b) $b_n = \sqrt[n]{2+3^n}$
 - c) $c_n = a + ar + \dots + ar^{n-1}$, $|r| < 1$
- 3) Sea a_n la sucesión dada por recurrencia: $a_0 = k$, $k > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{k}{a_n} \right)$.
 - a) Muestre que la sucesión está acotada inferiormente por $\sqrt{k}$.
 - b) Muestre que es decreciente a partir del segundo término.
 - c) Hallar el límite de a_n (¿por qué existe?).

Solución: 1) a) F b) F c) V 2) a) $5/2$ b) 3 c) $\frac{a}{1-r}$



21.6 Desafío

Determinar, en caso que exista, el valor de c para que:

$$\lim \left(\frac{n+c}{n-c} \right)^n = 4.$$