SESIÓN 2

Divergencia y rotacional

2.1 Introducción

En esta sesión se revisan dos operaciones sobre campos vectoriales, de frecuente uso el resto del curso. Una de ellas produce un campo escalar (divergencia) y la otra un campo vectorial (rotor).

2.2 Divergencia de un CV

Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, definido por

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

con P, Q y R campos escalares con derivadas parciales.
Se llama *divergencia* de $\overrightarrow{F}$, anotado $div(\overrightarrow{F})$, al campo escalar:

$$div(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial P}{dx} + \frac{\partial Q}{dy} + \frac{\partial R}{dz}$$

Nota 2.1. Si se considera el operador gradiente* $\nabla = (\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz})$, la divergencia de $\overrightarrow{F}$ se puede anotar simbólicamente como el producto punto entre ∇ y $\overrightarrow{F}$, es decir,

$$div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

* Este operador diferencial es conocido con el nombre de *nabla* o *del*.

En efecto:

$$div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{dx} + \frac{\partial Q}{dy} + \frac{\partial R}{dz}$$

Ejercicio 2.1. Calcular la divergencia de $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \sin(xy)\,\widehat{\imath} + \sin(yz)\,\widehat{\jmath} + \sin(zx)\,\widehat{k}$

Nota 2.2. No confundir ∇f con $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$.
$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ es el gradiente del CE f, mientras que $\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ corresponde al la divergencia del CV $\overrightarrow{F}$.

Algunas relaciones que involucran a la divergencia, se presentan en el siguiente teorema:

2.3 Teorema

Sean $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ campos vectoriales y ϕ, ψ campos escalares, entonces

1) $div(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = div(\overrightarrow{F}) + div(\overrightarrow{G})$

2) $div(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\, div(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot grad(\phi)$

3) $div(\nabla\phi \times \nabla\psi) = 0$

2.4 Rotacional de un CV

Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, definido por

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

con P, Q y R campos escalares con derivadas parciales.
Se llama *rotor* de $\overrightarrow{F}$, anotado $rot(\overrightarrow{F})$, al campo vectorial:

$$rot(\overrightarrow{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\widehat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\widehat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$$

Nota 2.3. Si se considera el operador gradiente $\nabla = (\frac{\partial}{dx}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{dz})$, el rotor de $\overrightarrow{F}$ se puede anotar simbólicamente como el producto cruz entre ∇ y $\overrightarrow{F}$, es decir,

$$rot(\overrightarrow{F}) = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{dx} & \dfrac{\partial}{dy} & \dfrac{\partial}{dz} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.2. Calcular el rotor de $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \sin(xy)\,\widehat{\imath} + \sin(yz)\,\widehat{\jmath} + \sin(zx)\,\widehat{k}$

2.5 Teorema

Verificar que si $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ es un CV con $P, Q, R \in C^2$ y $f(x, y, z)$ un CE C^2, entonces

1) $div(rot\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) = 0$

2) $rot(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \overrightarrow{0}$

Algunas relaciones que involucran al rotacional, se presentan en el siguiente teorema:

2.6 Teorema

Sean $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$ campos vectoriales y ϕ campo escalar, entonces

1) $rot(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G}) = rot(\overrightarrow{F}) + div(\overrightarrow{G})$

2) $rot(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\, rot(\overrightarrow{F}) + (\nabla\phi) \times \overrightarrow{F}$

3) $rot(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot rot(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \cdot rot(\overrightarrow{G})$

2.7 Interpretación física

Si $\overrightarrow{F}$ corresponde al campo de velocidades de un fluido, entonces

2.7.1 Interpretación física de la divergencia

La divergencia de $\overrightarrow{F}$ representa la razón neta de cambio de la masa del fluído que fluye desde un punto por unidad de volumen. En otras palabras la divergencia mide la tendencia de un fluído a *divergir* desde un punto.

- Si la $div(F)(P) < 0$, el campo se está *convergiendo* (comprimiendo, concentrando) en torno al punto P. En este caso, se dice que $\overrightarrow{F}$ tiene un *sumidero* en el punto P.

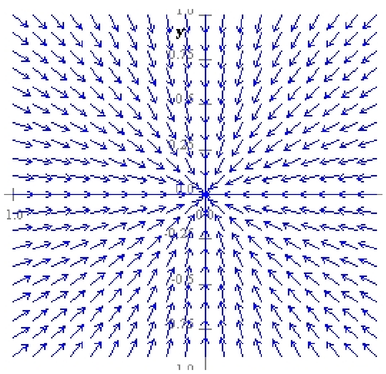
- Si la $div(F)(P) > 0$, el campo se está *divergiendo* (expandiendo, alejándose) del punto P. En este caso, se dice que $\overrightarrow{F}$ tiene un *manantial* en el punto P.

- Si la $div(F) = 0$, el campo se dice *incompresible*.

2.7.2 Interpretación física del rotacional

El $rot(\overrightarrow{F})(P)$ representa la tendencia de las partículas cercanas al punto P a rotar en torno al eje que apunta en la dirección del $rot(\overrightarrow{F})(P)$. El vector $rot(\overrightarrow{F})$, apunta en la dirección en la cual el fluído gira más rápido, siendo el valor $||rot(\overrightarrow{F})||$ una medidad de de la rápidez de esta rotación. Cuando $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$, el fluído se dice *irrotacional*.

Ejemplo 2.1. *Si el campo de velocidades $\overrightarrow{F}$ de un fluído tiene el siguiente campo de direcciones*



determinar si en origen

1) *la divergencia es positiva, negativa o 0*

2) *una rueda con paletas giraría positivamente (en las dirección de las manecillas de un reloj), negativamente o no giraría.*

3) *Sabiendo que el campo de vectores corresponden al campo vectorial $\overrightarrow{F} = \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\widehat{\imath} - \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,\widehat{\jmath}$, verificar algebraicamente las respuestas anteriores.*

Solución:

1) Como el campo apunta hacia el origen, es razonable pensar que el fluído se acumula en torno al origen. Por lo tanto $div(\overrightarrow{F})(0,0,0)$ debe tener un valor negativo.

2) Como el campo actúa radialmente, la rueda no giraría. Por lo tanto $rot(\overrightarrow{F}))(0,0,0) = \overrightarrow{0}$.

3) $div(\overrightarrow{f}) = \frac{3(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{2}{1+x^2+y^2)^{3/2}} + 0 = -2$

   $rot(\overrightarrow{F}) = (0-0)\widehat{\imath} + (0-0)\widehat{\jmath} + (\frac{3yx}{1+x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{3xy}{1+x^2+y^2)^{3/2}})\,\widehat{k} = \overrightarrow{0}$

2.8 Actividades

1) Calcular la divergencia y el rotor de los siguientes CV:

   a) $\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = x^2\,\widehat{\imath} + y^2\,\widehat{\jmath} + z^2\,\widehat{k}$ b) $\overrightarrow{F_2}(x,y) = \sin x\,\widehat{\imath} - \sin y\,\widehat{\jmath}$

2) Calcular el rotor y la divergencia del siguiente campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\widehat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\widehat{\jmath}$$

   Respuesta: Rotor $\overrightarrow{0}$, Divergencia 0.

3) Sean f un CE y $\overrightarrow{F}$ un CV, determinar cual(es) de las siguientes expresiones tienen sentido. Justificar su respuesta.

   a) $rot(f)$, b) $rot(grad(f))$ c) $div(div(f))$ d) $div(div(\overrightarrow{F}))$ e) $rot(rot(\overrightarrow{F}))$

4) Encontrar un campo vectorial cuya divergencia sea:

   a) 1 b) x^2y c) $\sqrt{x^2+z^2}$

5) Sea $\overrightarrow{r} = x\,\widehat{\imath} + y\,\widehat{\jmath} + z\,\widehat{k}$ y $r = ||\overrightarrow{r}||$, verificar que:

   a) $\nabla \cdot \overrightarrow{r} = 3$ b) $\nabla \cdot (r\,\overrightarrow{r}) = 4r$ c*) $\nabla^2 r^3 = 12r$

6) Con las mismas notaciones del ejercicio precedente, comprobar que

   a) $\nabla r = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$ b) $\nabla \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{0}$ c) $\nabla(1/r) = -\dfrac{\overrightarrow{r}}{r^3}$

7) Verificar que la divergencia del gradiente de un CE f viene dada por

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{dy^2} + \frac{\partial^2 f}{dz^2}$$

   La expresión recién obtenida recibe el nombre de *laplaciano de f* y la ecuación

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{dy^2} + \frac{\partial^2 f}{dz^2} = 0$$

   se denomina *ecuación de Laplace*, y a toda función que cumpla con esta ecuación se le llama *función armónica*.

   Estudiar cuáles de las siguientes funciones son armónicas:

   a) $f(x,y,z) = \dfrac{k}{x^2+y^2+z^2}$

   b) $g(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$

* Mirar ejercicio 7

c) $h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$

Pierre Simon Laplace

Matemático Francés (1749-1827)

8) Verificar que si $f(x,y,z)$ es armónica, también lo es la función

$$\frac{1}{r} f\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right),$$

donde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

9) Considerar el campo vectorial

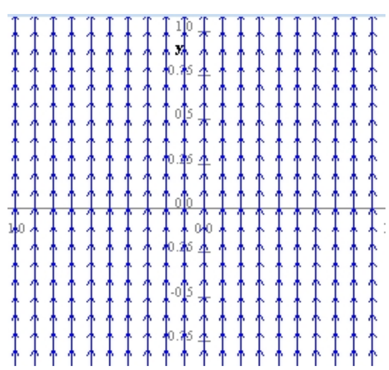
$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{\overrightarrow{r}}{r^p}$$

con $\overrightarrow{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$ y $r = ||\overrightarrow{r}||$.

a) Calcular $div(\overrightarrow{F})$.

b) Determinar los valores de p para los cuales $div(\overrightarrow{F}) = 0$.

10) Si el campo de velocidades $\overrightarrow{F}$ de un fluído tiene el siguiente campo de direcciones

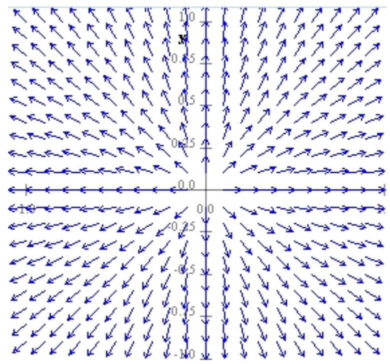


determinar si en origen

a) la divergencia es positiva, negativa o 0

b) una rueda con paletas giraría positivamente (en las dirección de las manecillas de un reloj), negativamente o no giraría

c) Los mismo si el campo de vectores es



2.9 Desafío

Un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ se dice radial, cuando tiene la forma

$$\overrightarrow{F}(r) = \phi(r)\overrightarrow{r}$$

donde ϕ es una función derivable, $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$, y $r = ||\overrightarrow{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Verificar que:

1) $grad(\overrightarrow{F}) = \dfrac{\phi'(r)}{r}\overrightarrow{r}$

2) $div(\overrightarrow{F}) = r\phi'(r) + 3\phi(r)$

3) $rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$