

Curvas

3.1 Introducción

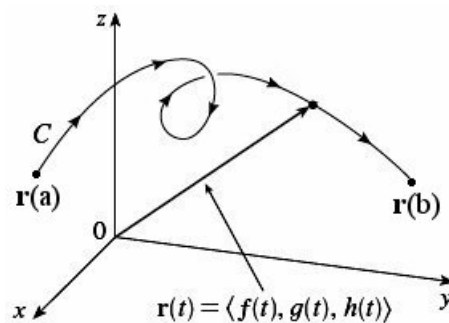
En esta sesión se revisa el concepto de *curva*, el cual resulta ser clave en el resto de esta unidad.

3.2 Curvas en el plano y el espacio

Informalmente se denomina *curva* a la traza de una partícula que se mueve en el plano o el espacio. Formalmente, se llama *curva en el espacio* al gráfico de una función

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \quad (3.1)$$

donde f_1 , f_2 y f_3 son funciones reales definidas en un intervalo $I = [a, b]$.



Curva en el espacio

Nota 3.1.

- Una función del tipo recién definido ($\vec{r}$) recibe el nombre de *función vectorial*.
- Las funciones f_1 , f_2 y f_3 se llaman *funciones componentes* de $\vec{r}$.
- En el caso que $f_3 = 0$, la función f queda:

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} = (f_1(t), f_2(t)) \quad (3.2)$$

y en tal caso la curva asociada (su gráfico) es una curva en el plano.

- Es frecuente presentar las funciones componentes de una función vectorial mediante las ecuaciones

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva asociada. Además, a la ecuación (3.1) se le llama *una parametrización* de la curva correspondiente y la variable t *parámetro*.

- Una parametrización es continua, cuando sus funciones componentes lo son.
- En lugar de *curva*, a veces se habla de *camino* o *trayectoria*.

3.3 Ejemplos claves

3.3.1 Segmento de recta

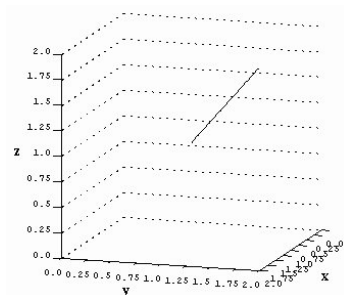
La curva en el espacio, correspondiente al segmento de recta que une los puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ viene dada por la función vectorial:

$$\vec{s}(t) = (a_1 + (b_1 - a_1)t, a_2 + (b_2 - a_2)t, a_3 + (b_3 - a_3)t); \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

Así, por ejemplo, el segmento de recta, S , que une los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 + t; \quad t \in [0, 1]$$

y su gráfico es:



Segmento de recta

Observar que cuando t varía entre 0 y 1, los puntos del segmento varían desde el punto $(1, 1, 1)$ al punto $(2, 2, 2)$.

Ejercicio 3.1. Determinar y esbozar las ecuaciones paramétricas del segmento

- 1) en el espacio, que une los puntos $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$.
- 2) en el plano, que une los puntos (a, b) y (c, d) .

3.3.2 Circunferencia en el plano

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio r son:

$$x = r \cos(t), \quad y = r \sin(t); \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ejercicio 3.2. Determinar las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio 3. En general, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio r y centrada en el punto (x_0, y_0) ?

3.3.3 Hélice

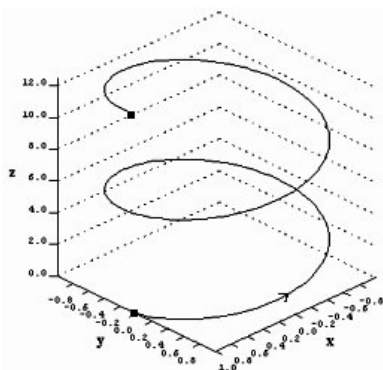
Considerando la curva en el espacio con ecuación vectorial

$$\vec{h}(t) = \cos(t)\hat{i} + \sin(t)\hat{j} + t\hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

o sus equivalentes ecuaciones paramétricas

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = t; \quad t \in [0, 4\pi]$$

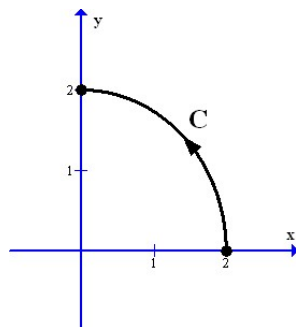
corresponde a una curva que *parte del punto* $(1, 0, 0)$ (cuando $t = 0$), y que a medida que t crece, los puntos correspondientes de la curva van *subiendo*, pero siempre sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



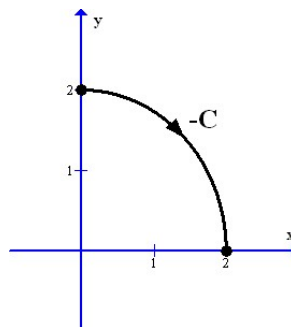
Hélice circular

3.4 Curvas orientadas

Asociado a una curva, se considera su orientación, la cual hace referencia a la dirección en la cual son descritos sus puntos. Así, por ejemplo para la hélice circular del ejemplo anterior, ella parte desde el punto $\vec{h}(0)$ y termina en el punto $\vec{h}(4\pi)$. Este sentido se define como el *positivo*, y *negativo* el contrario. El sentido de la curva se anota, tal como allí se señala, incorporando una *flecha* sobre ella.



$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$



$$\vec{r}(t) = (\cos(\pi/2 - t), \sin(\pi/2 - t)), \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

Nota 3.2. En general, si C es una curva con ecuación $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, la curva $-C$ tiene por ecuación $\vec{r}(a + b - t)$, con t también en $[a, b]$.

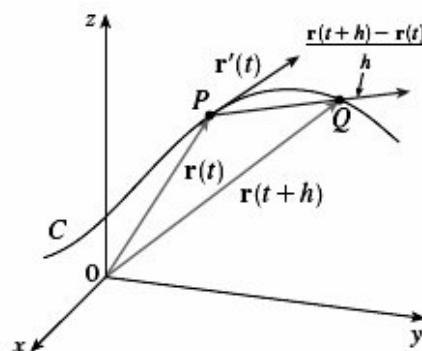
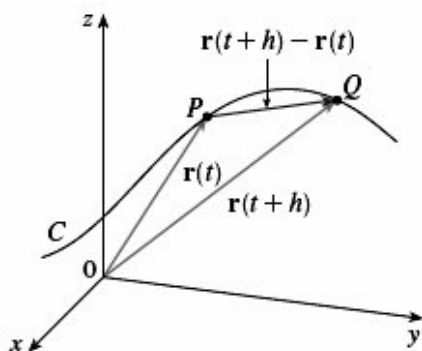
3.5 Derivada de una función vectorial

La derivada $\vec{r}'$ de una función vectorial del tipo (3.1) se define análogamente al caso de funciones reales:

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \quad (3.3)$$

siempre que este límite exista.

Geométricamente, $\vec{r}'(t)$ representa un vector tangente a la curva C en su punto $P = \vec{r}(t)$ que sigue la dirección del sentido de la curva.



Vectores secante y tangente a una curva

Nota: El cálculo de (3.3) se facilita, luego del siguiente teorema:

3.5.1 Teorema

Si

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

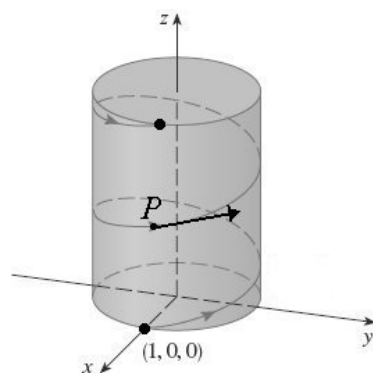
es una función vectorial con sus funciones componentes diferenciables, entonces

$$\vec{r}'(t) = f_1'(t)\hat{i} + f_2'(t)\hat{j} + f_3'(t)\hat{k} = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

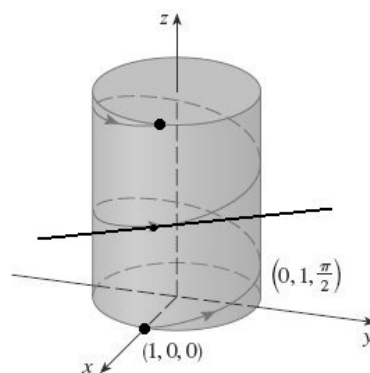
Nota 3.3. Cuando la curva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ representa la trayectoria del movimiento de una partícula:

- $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$, representa la velocidad del móvil, y $\|\vec{r}'(t)\|$ su rapidez.
- $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$, corresponde a la aceleración del móvil.

Ejercicio 3.3. Dada la curva $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$ con $0 \leq t \leq 4\pi$, encontrar su vector tangente y recta tangente en su punto $P = \vec{r}(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$.



Vector tangente

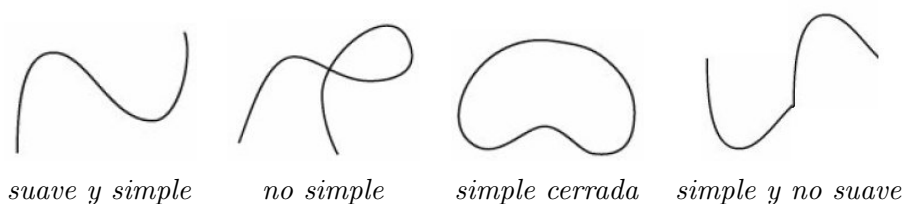


Recta tangente

3.6 Tipos especiales de curvas

Una curva del tipo (3.1) se dice:

- 1) *suave*, cuando su derivada es continua y no se anula en ningún punto interior al intervalo I .
- 2) *simple*, cuando la función $\vec{r}(t)$ es inyectiva.
- 3) *cerrada*, cuando $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, con $t \in [a, b]$.



3.7 Movimiento de partículas

Si la posición de una partícula viene dada por la curva

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde las funciones componentes son C^2 , entonces la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula se definen por:

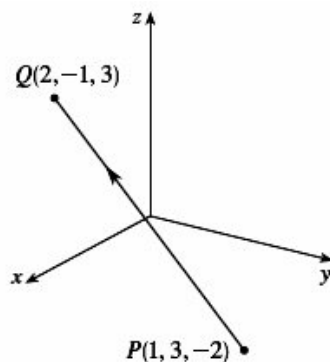
- Velocidad: $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$
- Rapidez: $\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$
- Aceleración: $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$

Nota 3.4. Observar que la velocidad de la partícula coincide con el vector tangente a la curva.

3.8 Actividades

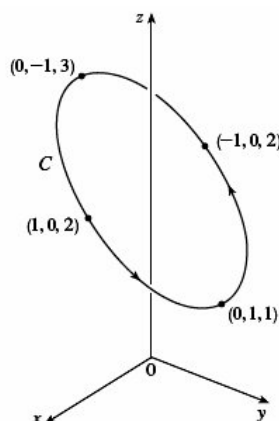
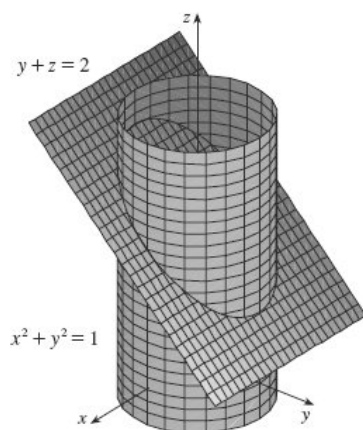
- 1) Determinar las ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas. Hacer un esbozo de cada una de ellas e indicar la dirección en que la curva es descrita cuando el parámetro crece en su correspondiente intervalo.
 - a) $x = 1 + t, y = 4 - 2t, \quad t \in [-2, 4]$
 - b) $x = 1 + t^2, y = 4 - 2t, \quad t \in [0, 2]$
 - c) $x = \sqrt{1+t}, y = t - 1, \quad t \in [3, 6]$
 - d) $x = \sec t, y = 2 \tan t, \quad t \in [0, 2\pi]$
 - e) $x = 2 + t, y = t - 2, z = 2 - t, \quad t \in [-2, 2]$
 - f) $x = t, y = t^2, z = 2, \quad t \in [-1, 1]$
 - g) $x = 2 \cos(t), y = -1, z = 3 \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$
 - h) $x = 2 + \cos(t), y = -1 + 2 \sin(t), z = 3, \quad t \in [0, \pi]$
- 2) Encontrar las ecuaciones cartesianas de las curvas (a), (b), (c) y (d) del ítem precedente.

- a) Determinar las ecuaciones correspondiente al siguiente segmento de recta en el espacio. Poner atención a la dirección indicada.



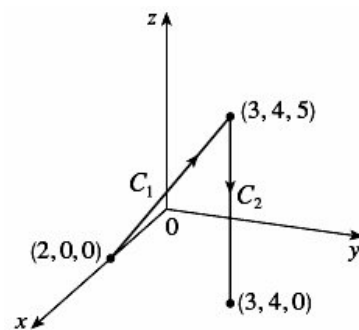
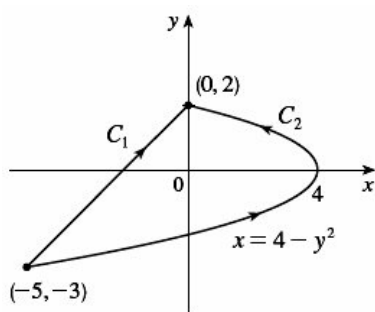
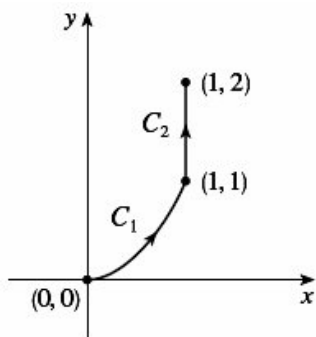
Segmento de recta

- b) Encontrar unas ecuaciones paramétricas para la curva C correspondiente a la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.



C : intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$

- 3) Es frecuente que una curva C no sea suave, pero que corresponda a la *concatenación* de ciertas curvas suaves, digamos C_1 y C_2 . En este caso se anota $C = C_1 + C_2$. Para las siguientes curvas encontrar sus ecuaciones paramétricas.



- 4) Para las siguientes curvas, hacer un esbozo de ellas y encontrar y graficar $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ para el valor indicado del parámetro:

a) $x = 1 + t, \quad y = \sqrt{t}$; en $t = 1$

b) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t})$ en $t = 0$

- 5) Determinar el vector tangente unitario y una ecuación de la recta tangente a la curva $\vec{r}(t) = (\cos(t), 2t, 2\sin(2t))$ en $t = 0$.

- 6) Considerar las curvas

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} + (3+t^2)\vec{k}$$

$$C_2 : \vec{r}_2(s) = (3-s)\vec{i} + (s-2)\vec{j} + s^2\vec{k}$$

Determinar

- a) El (o los) punto(s) en los cuales se intersectan C_1 y C_2 .
 b) Calcular el ángulo de intersección en uno de sus puntos de intersección*.
 7) *Longitud de una curva.* La longitud de una curva en el plano de ecuaciones paramétricas $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ con $t \in [a, b]$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt$$

Análogamente, para una curva en el espacio (3.1), su longitud es

$$L = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2} dt$$

Observar que la longitud de una curva, *en ambos casos*, se puede expresar por

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

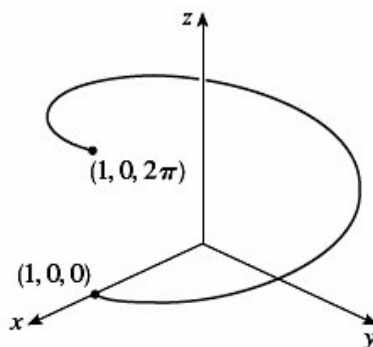
Hallar las longitudes de las siguientes curvas:

a) $\vec{r}(t) = (\sin(t), 1, \cos(2t))$ con $-1 \leq t \leq 1$.

b) $\vec{r}(t) = (t^2, \sin(t) - t \cos(t), \cos(t) + t \sin(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.

c) la hélice circular con el siguiente gráfico:

* Este ángulo se define como el ángulo que forman sus vectores tangentes en el punto de intersección.



- 8) Verificar que la curva

$$x = x(t) = t \cos t, \quad y = y(t) = t \sin t, \quad z = z(t) = t$$

se encuentra sobre un cono, y usando este hecho, hacer un esbozo de su gráfico.

- 9) Encontrar la ecuación paramétrica de la curva correspondiente a la intersección del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$.
- 10) Una partícula de masa m_0 se mueve siguiendo una trayectoria circular de radio r_0 :

$$\vec{r}(t) = \left(r_0 \cos \frac{ts}{r_0}, r_0 \sin \frac{ts}{r_0} \right)$$

- Verificar que su rapidez es constante e igual a s .
 - Comprobar que $\vec{a}(t) = -\frac{s^2}{r_0^2} \vec{r}(t)$
- 11) Una partícula se mueve sobre la curva
- $$\vec{r}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$$
- Calcular su velocidad, rapidez y aceleración en el instante $t = 2$
 - Encontrar una ecuación de la recta tangente en su punto $\vec{r}(2)$
 - Suponer que la partícula sale por su tangente en el instante $t = 2$. Encontrar la posición de la partícula en $t = 4$
- 12) Una partícula se mueve sobre la curva plana C , llamada cicloide,

$$\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

- Hacer un esbozo del gráfico de C
- Calcular su velocidad y rapidez en el punto $\vec{r}(t)$. ¿En qué instante su rapidez es 0?

- c) Verificar que su longitud entre $t = 0$ y $t = 2\pi$ es igual a 8 (unidades de long.)
- 13) Una partícula sigue la trayectoria $\vec{r}(t) = (t^2, 5t, t^2 - 16t)$. ¿Dónde es mínima su rapidez?.

3.9 Desafío

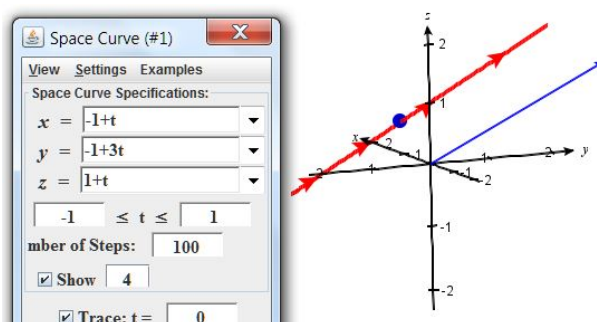
Decidir si la curva

$$\vec{r}(t) = (1+t)\hat{i} + (1+t^2)\hat{j} + (1+2t-t^2)\hat{k}$$

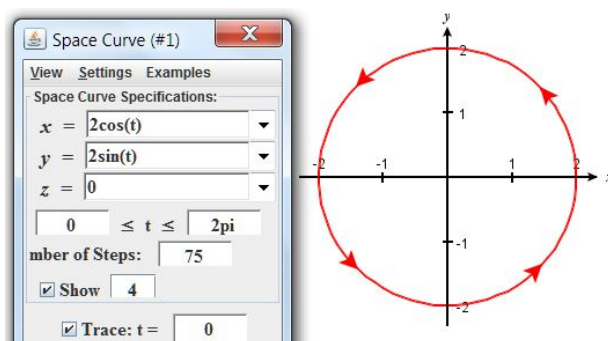
es plana, es decir si esta completamente contenida en un plano, y en caso afirmativo, encontrar el plano que la contiene.

3.10 APENDICE: Ecuaciones paramétricas de algunas curvas

- 1) Recta*

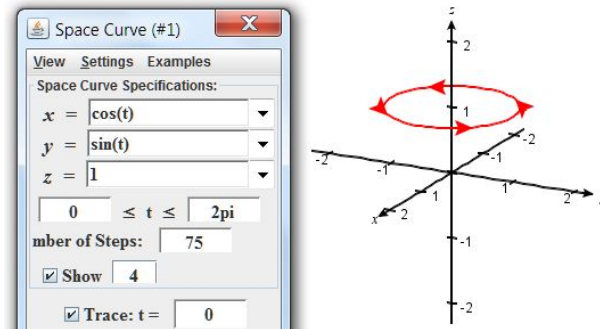
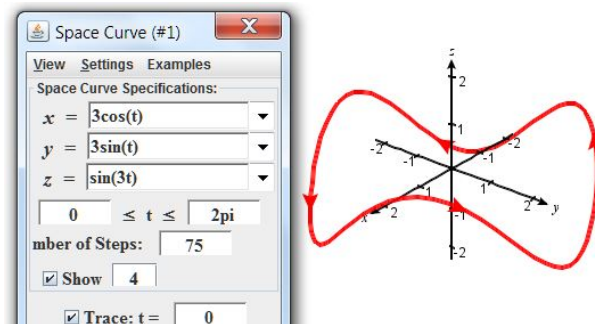


- 2) Circunferencia

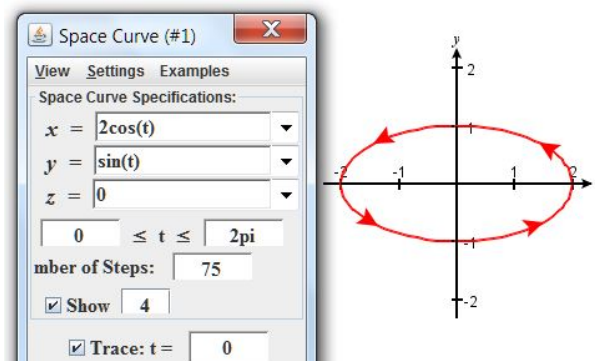


* Los siguientes gráficos se realizaron con el applet CalcPlot3D, disponible (on line) en <http://web.monroec.edu/manila/webfiles/calcNSF/JavaCode/CalcPlot3D.htm>

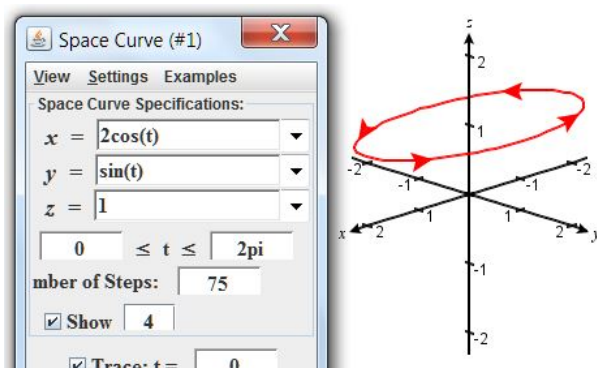
3) Una circunferencia en el espacio

4) Una circunferencia *ondulada*

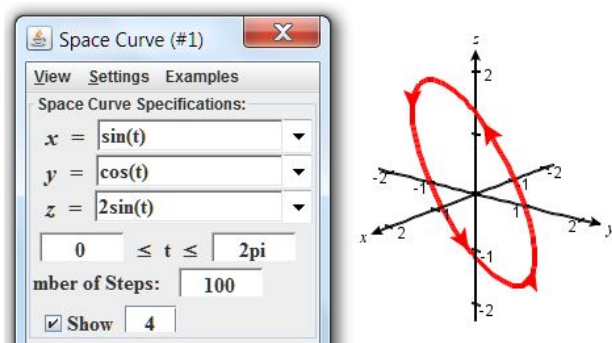
5) Elipse



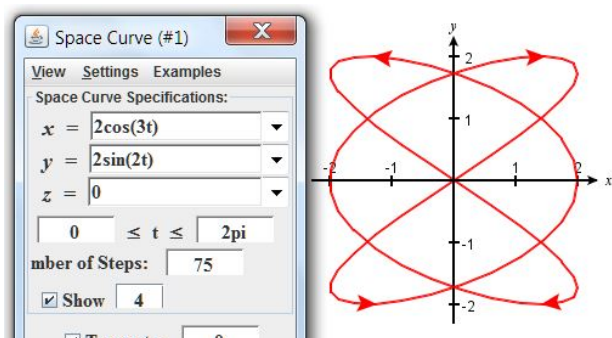
6) Una elipse en el espacio



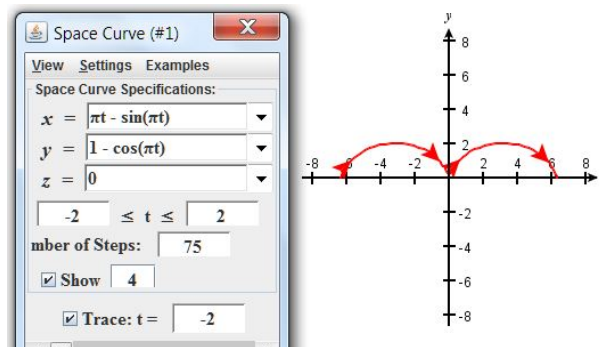
7) Una elipse *inclinada*



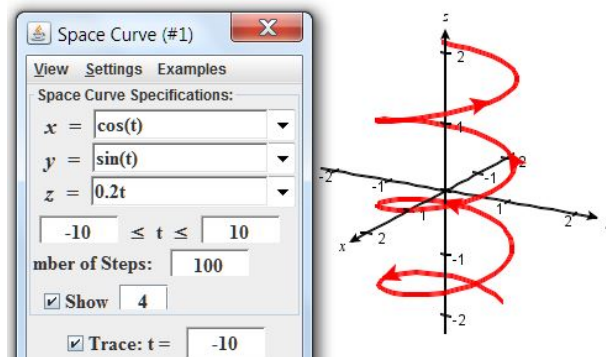
8) Lissajous



9) Cicloide



10) Hélice



11) Mariposa

