SESIÓN 4

Integral de línea I

4.1 Introducción

En esta sesión se revisa el concepto de un nuevo tipo de integral, de manera completamente análoga al caso de la integral de Riemann de una función de una variable real, y que tiene múltiples aplicaciones, particularmente en el ámbito de la Física.

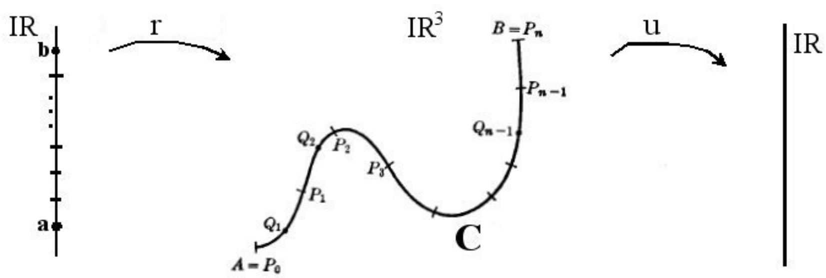
4.2 Integral de línea de un CE

Sean:

- C una curva suave en el espacio, con ecuación vectorial

$$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\widehat{i} + y(t)\widehat{j} + z(t)\widehat{k}, \quad \text{con } a \leqslant t \leqslant b$$

- $u = f(x, y, z)$ un CE continuo en un conjunto que contiene a la curva C.



A continuación se define la *integral de línea del CE f sobre la curva C con respecto a x*, siguiendo los mismos pasos de la definición de la integral de Riemann de una función $y = f(x)$.

Paso 1 Hacer una partición π del intervalo $[a, b]$:

$$\pi: \; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Paso 2 La partición π induce una partición $\overline{\pi}$ en la curva C:

$$\overline{\pi}: \; P_0 = \overrightarrow{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0), P_1 = \overrightarrow{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1), \cdots, P_n = \overrightarrow{r}(t_n) = (x_n, y_n, z_n)$$

Paso 3 En cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ se elige un punto arbitrario t_i^*, de modo que $Q_i = \overrightarrow{r}(t_i^*)$ es un punto en el sub arco correspondiente de C.

Paso 4 Formar ahora la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overrightarrow{r}(t_i^*))\Delta x_i \tag{4.1}$$

con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Ahora, cuando existe el siguiente límite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overrightarrow{r}(t_i^*))\Delta x_i \tag{4.2}$$

éste recibe el nombre de *integral de línea de f sobre la curva C con respecto a x*, y se anota

$$\int_C f(x, y, z)dx \text{ o, simplemente } \int_C f dx$$

Una definición completamente análoga se tiene para la integral de línea de f *con respecto a y*, y *con respecto a z*.

$$\int_C f dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overrightarrow{r}(t_i^*))\Delta y_i, \qquad \int_C f dz = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overrightarrow{r}(t_i^*))\Delta z_i \tag{4.3}$$

Nota 4.1.

1) Definiciones análogas se hacen para curvas en el plano. En este caso, se tienen 2 integrales de línea.

2) Cuando f, g y h son un CE continuos en un dominio que contiene a una curva C suave en el espacio, la suma de las integrales de línea con respecto a x, a y y a z:

$$\int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz$$

se anota simplemente

$$\int_C f dx + g dy + h dz$$

3) Para calcular con facilidad una integral de línea, se usa el siguiente teorema:

4.2.1 Teorema

Si C es una curva suave definida por

$$C: \ \overrightarrow{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}, \quad \text{con} \quad a \leqslant t \leqslant b$$

y f, g y h son un CE continuos en en una región que contiene a C, entonces

$$\int_C \mathbf{f} dx + \mathbf{g} dy + \mathbf{h} dz = \int_a^b \left[\mathbf{f}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \mathbf{g}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \mathbf{h}(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right] dt \qquad (4.4)$$

Ejemplo 4.1. Calcular $\int_C zdx + xdy + ydz$, donde $C : x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^2$; $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \int_C zdx + xdy + ydz &= \int_0^1 t^2 \cdot 2tdt + t^2 \cdot 3t^2 dt + t^3 \cdot 2tdt \\ &= \int_0^1 (2t^3 + 5t^4) dt \\ &= \left(\tfrac{1}{2}t^4 + t^5\right)\Big|_0^1 = \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Nota 4.2.

1) En (4.4) si $-C$ es la curva C orientada* en sentido contrario, se tiene que

$$\int_{-C} f dx + g dy + h dz = -\int_C f dx + g dy + h dz$$

* Asociado a una curva, se considera su orientación, la cual hace referencia a la dirección en la cual son descritos sus puntos. Así, por ejemplo para la curva (3.1), ella parte desde el punto $\overrightarrow{r}(a)$ y termina en el punto $\overrightarrow{r}(b)$. Este sentido se define como el *positivo*, y *negativo* el contrario.

2) El valor de (4.4) no depende de la parametrización de la curva C, siempre que se conserve su sentido.

3) Cuando la curva C no es suave, pero es la unión de un número finito de curvas suaves consecutivas: $C_1,\ C_2,\ \cdots\ C_n$; se define la integral sobre C como las sumas de las integrales sobre las C_i:

$$\begin{aligned}\int_C f dx + g dy + h dz &= \textstyle\int_{C_1} f dx + g dy + h dz + \int_{C_2} f dx + g dy + h dz + \cdots \\ &\qquad + \textstyle\int_{C_n} f dx + g dy + h dz\end{aligned}$$

4) Si $s(t)$ es la longitud de la curva C desde $\overrightarrow{r}(a)$ hasta $\overrightarrow{r}(t)$, se tiene que

$$s'(t) = ||r'(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

La integral de línea de f sobre C c*on respecto a la longitud de arco* s se define por

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t)) s'(t) dt$$

5) En Física, si la curva C representa un *delgado* alambre con densidad lineal $\rho(x, y, z)$ en su punto (x, y, z), entonces la masa de este alambre se define por

$$m = \int_C \rho\, ds$$

y su centro de masa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, viene dado por

$$\overline{x} = \int_C x\rho(x, y, z) ds, \quad \overline{y} = \int_C y\rho(x, y, z) ds, \quad \overline{z} = \int_C z\rho(x, y, z) ds.$$

Ejemplo 4.2. Calcular $\int_C (2x + 9z) ds$, donde $C:\ x = t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Desarrollo: En primer lugar se calcula

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

Luego,

$$\int_C (2x + 9z) ds = \int_0^1 (2t + 9t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} dt = \frac{1}{6}\left(14^{3/2} - 1\right) \approx 8.564$$

4.3 Integral de línea de un CV

Sea
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\widehat{\imath} + Q(x,y,z)\,\widehat{\jmath} + R(x,y,z)\,\widehat{k}$$
un campo vectorial continuo definido sobre una región que contiene la curva suave
$$C: \quad \overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\widehat{\imath} + y(t)\,\widehat{\jmath} + z(t)\,\widehat{k}, \quad \text{con} \quad a \leqslant t \leqslant b$$
La integral de línea del CV $\overrightarrow{F}$ sobre C se anota y define por:
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \tag{4.5}$$

Nota 4.3.

1) Observar que en (4.5) $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)$ es un campo escalar. Luego, la integral de línea de un CV se reduce a una integral de línea de un CE.

2) Como es de suponer, la integral de línea también se puede definir para campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$ sobre curvas en el plano.

3) Usando
$$d\overrightarrow{r} = dx\,\widehat{i} + dy\,\widehat{j} + dz\,\widehat{k}$$
la integral de línea (4.5) se suele anotar también como
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

4) Observar que
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{||\overrightarrow{r}'(t)||}||\overrightarrow{r}'(t)||dt$$
ahora, llamando $\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{||\overrightarrow{r}(t)||}$ al vector tangente unitario a la curva C en el punto $\overrightarrow{r}(t)$,
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{T}\; ||\overrightarrow{r}'(t)||dt$$
y definiendo $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{T}\,ds$, se tiene que la integral de línea de un CV con respecto a la longitud de arco, viene dada por
$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\,ds$$

5) En Física, la integral de línea (4.5) corresponde al trabajo realizado por un campo de fuerzas $\overrightarrow{F}$ para llevar una partícula sobre la curva C, desde $\overrightarrow{r}(a)$ hasta $\overrightarrow{r}(b)$.

4.4 La integral de línea asociada al concepto de trabajo

4.4.1 Fuerza constante

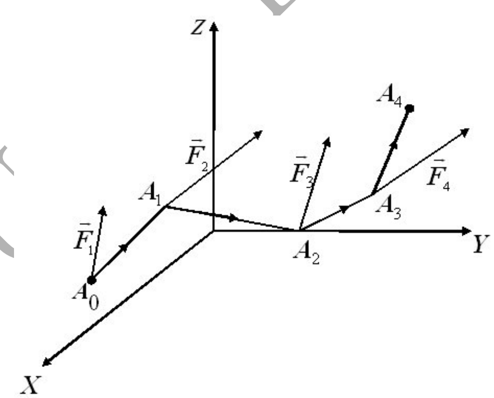
Supongamos que una fuerza $\overrightarrow{F}$ desplaza un objeto desde un punto A hasta un punto B, a través del segmento AB. En este caso se define el trabajo realizado por la fuerza $\overrightarrow{F}$, por

$$T = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Notar que, equivalentemente

$$T = ||\overrightarrow{F}||\ ||\overrightarrow{AB}||\ \cos\alpha$$

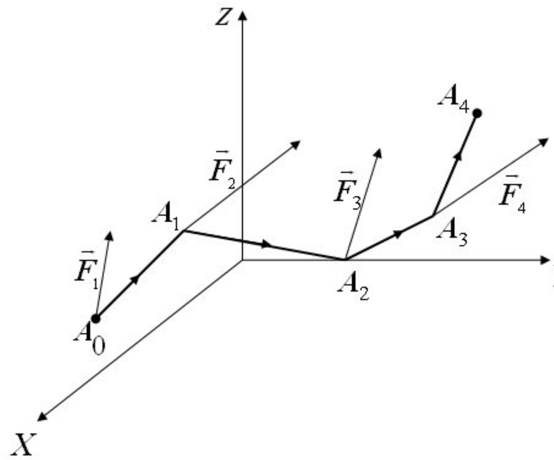
donde $\alpha = \angle(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB})$, es decir α es el ángulo que forma el vector fuerza $\overrightarrow{F}$ con el vector desplazamiento $\overrightarrow{AB}$.



4.4.2 Fuerza seccionalmente constante

Supongamos ahora, que se tiene un camino poligonal, P, en el espacio que une los puntos A_0, A_1, A_2 y A_3; y que en cada segmento del camino poligonal actúan fuerzas constantes: $\overrightarrow{F_1}$ en el camino $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ en el camino $\overrightarrow{A_1A_2}$, etc. En este caso el trabajo total realizado por estas fuerzas para desplazar un objeto sobre P, desde A_0 hasta A_4 es:

$$T = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{F_3} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{F_4} \cdot \overrightarrow{A_3A_4}$$



Nota 4.4. En caso que el camino poligonal este conformado por n segmentos que unen los puntos A_0, A_1, A_2, $\cdots$ A_n, de modo que en cada uno de estos segmentos actúan fuerzas constantes $\overrightarrow{F_i}$, correspondientemente, entonces el trabajo total realizado por este conjunto de fuerzas al desplazar un objeto sobre P, desde A_0 hasta A_n es:

$$T = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + \overrightarrow{F_n} \cdot \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

4.4.3 Fuerza continuamente variable

El caso general, asociado a las dos situaciones recién comentadas, corresponde al trabajo realizado por un campo de fuerzas variable, que actúa en cada punto de una curva C, al desplazar un objeto desde el punto inicial al punto terminal de dicha curva. Para fijar ideas, sean

- $C: \ \overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k} = (f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t))$, con $t \in [a,b]$, una curva, y
- $\overrightarrow{F}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una campo (vectorial) de fuerzas, de modo que $\overrightarrow{r}([a,b]) \subset \Omega$, para que $\overrightarrow{F}$ *actúe* en cada punto de C.

Para resolver esta situación, se observa que cada partición π del intervalo $[a,b]$:

$$\pi: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

induce una partición $\overline{\pi}$ en la curva C:

$$\overline{\pi}: \ P_0 = \overrightarrow{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0), P_1 = \overrightarrow{r}(t_1) = (x_1, y_1, z_1), \cdots, P_n = \overrightarrow{r}(t_n) = (x_n, y_n, z_n)$$

Ahora bien, aproximando el trabajo realizado por $\overrightarrow{F}$ en el $i-$*esimo* sub-arco $\overrightarrow{r}(t_{i-1})-\overrightarrow{r}(t_i)$, por

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t_{i-1})) \cdot \overrightarrow{r}'(t_{i-1})\Delta t_i$$

se tiene que el trabajo total realizado por $\overrightarrow{F}$ al mover un objeto sobre toda la curva C, es aproximadamente igual a la siguiente suma de Riemann:

$$T \approx \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t_{i-1})) \cdot \overrightarrow{r}'(t_{i-1})\Delta t_i$$

Por lo tanto, es natural definir el trabajo total realizado por la fuerza $\overrightarrow{F}$, como*

$$T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t_{i-1})) \cdot \overrightarrow{r}'(t_{i-1})\Delta t_i$$

es decir,

$$T = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt$$

o sea,

$$\boxed{T = \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}}$$

Luego, la integral de línea de una campo vectorial $\overrightarrow{F}$ sobre una curva C, se interpreta desde el punto de vista de la Física como el trabajo que realiza este campo de fuerzas al desplazar un objeto sobre la curva C desde $\overrightarrow{r}(a)$ hasta $\overrightarrow{r}(b)$.

4.5 Actividades

1) Calcular las siguientes integrales de línea:

   a) $\displaystyle\int_C xdx + ydy + zdz$ donde $C(t) = (t, t, t)$ $t \in [-1, 1]$

   b) $\displaystyle\int_C (x + y)dx + (x - y)dy + (y - z)dz$ donde $C(t) = (t^2, t, 1)$ $t \in [0, 2]$

   c) $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ $C(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

   d) $\displaystyle\int_C 2xydx - ydy$ donde C es el arco de parábola $y = x^2$ que va de $(-2, 4)$ hasta $(0, 0)$ seguido del segmento que va de $(0, 0)$ hasta $(2, 6)$

2) Calcular las siguientes integrales de línea:

* Se asume que cuando $n \to \infty$, la norma de las particiones tiende a 0.

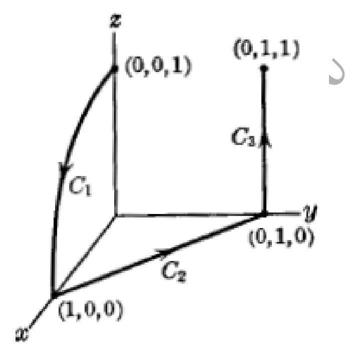
a) $\displaystyle\int_C (x^2 - 2xy)\, ds, \quad C(t) = (-\sin t, \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

b) $\displaystyle\int_C xy\, ds, \quad C(t) = (3\cos t, 3\sin t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

c) $\displaystyle\int_C \frac{z}{x^2+y^2}\, ds, \quad C(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

d) $\displaystyle\int_C xy^2\, ds,$ donde C es la semicircunferencia superior centrada en el origen, que va de $(3,0)$ hasta $(-3,0)$

3) Calcular $\int_C xz\, dx + x\, dy - yz\, dz$, donde C es la curva que consiste en un cuarto de circulo en el plano XZ y los segmentos de recta en los planos XY e YZ, tal como se indica en la siguiente figura:



Respuesta: $\frac{1}{3}$, pues $\int_{C_1} xz\, dx + x\, dy - yz\, dz = \frac{1}{3}$, $\int_{C_2} xz\, dx + x\, dy - yz\, dz = \frac{1}{2}$, $\int_{C_3} xz\, dx + x\, dy - yz\, dz = -\frac{1}{2}$

4) Al doblar un delgado alambre se forma un semicírculo de ecuación aproximadamente igual a $x^2+y^2=4$ con $x \geqslant 0$. Si su densidad lineal es constante e igual a k, encontrar la masa y centro de masa de este alambre.

Respuesta: $m = 2k\pi$, $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{4}{\pi}, 0)$

5) Determinar la masa y centro de masa de un alambre con la forma de la hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, si la densidad en cualquier punto de este alambre es igual al cuadrado de su distancia al origen.

Respuesta: $m = \sqrt{2}(\frac{8}{3}\pi^3 + 2\pi)$, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\frac{3\pi(2\pi^2+1)}{4\pi^2+3}, 0, 0)$

6) Encontrar el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$$

sobre una partícula que se mueve en el segmento de recta que va del punto $(1,0,0)$ al punto $(3,4,2)$. Respuesta: 26 (unidades de fuerza).

7) a) Verificar que una fuerza constante realiza trabajo cero sobre una partícula que se mueve uniformemente una vez sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

b) ¿Sucede lo mismo si la fuerza viene dada por $\overrightarrow{F}(x, y) = (kx, ky)$, con k constante?.