SESIÓN 5

Integral de línea II

5.1 Introducción

En esta sesión se revisa el Teorema Fundamental de integrales de línea y el análisis de las condiciones para que la integral de línea de un campo vectorial sea independiente de la curva de integración.

Actividad 5.1. Para el campo vectorial $F(x,y) = (xy, y^2)$, evaluar la integral de línea $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, para cada uno de los caminos que unen los puntos $A = (0,0)$ y $B = (1,1)$:

1) $C_1 : x = t,\ \ y = t,\ \ t \in [0,1]$

2) $C_2 : x = t,\ \ y = t^2,\ \ t \in [0,1]$

Respuesta: *a*) 2/3 *b*) 9/20

Actividad 5.2. Para el campo vectorial $F(x,y) = (2xy, x^2)$, evaluar la integral de línea $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, para cada uno de los caminos que unen los puntos $A = (0,0)$ y $B = (1,1)$:

1) $C_1 : x = t,\ \ y = t,\ \ t \in [0,1]$

2) $C_2 : x = t,\ \ y = t^2,\ \ t \in [0,1]$

3) $C_3 = C_{31} + C_{32}$, donde
$C_{31} : x = t,\ \ y = 0,\ \ t \in [0,1]$ y $C_{32} : x = 1,\ \ y = t,\ \ t \in [0,1]$

Respuesta: *a*) 1 *b*) 1 *c*) 1

Nota 5.1. Las actividades precedentes sugieren que algunas integrales de línea dependen del camino que une dos puntos (actividad 1) y otras no (actividad 2).

5.2 Teorema fundamental para integrales de línea

Sea C una curva suave, contenida en un disco abierto D de $\mathbb{R}^2$ (o una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$), que va desde el punto A hasta el punto B. Si $\overrightarrow{F}$ es una campo vectorial *conservativo* continuo sobre D y φ una función diferenciable, potencial para $\overrightarrow{F}$ ($\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$), entonces

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

es independiente de la trayectoria C, y

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Corolario: Sea C una curva *cerrada* y suave contenido en disco abierto D de $\mathbb{R}^2$ (o una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$). Si $\overrightarrow{F}$ es una campo vectorial conservativo continuo sobre B , entonces

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$$

Nota 5.2. Cuando la integral de línea es sobre una curva cerrada C, ésta se acostumbra a denotarla como

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Nota 5.3. El siguiente teorema establece una condición bastante simple para decidir si un campo vectorial es o no conservativo, y luego del teorema precedente si su integral de línea es no independiente de la trayectoria.

5.3 Teorema. Criterio de las componentes para un campo conservativo

Sea $\overrightarrow{F} = P\widehat{\imath} + Q\widehat{\jmath}$ una campo vectorial sobre un disco abierto de $\mathbb{R}^2$, con P y Q funciones C^1 en este disco, entonces

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Nota 5.4. En caso que $\overrightarrow{F} = P\widehat{\imath} + Q\widehat{\jmath} + R\widehat{k}$ una campo vectorial sobre una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$, con sus componentes C^1 en esta esfera, se tiene que

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

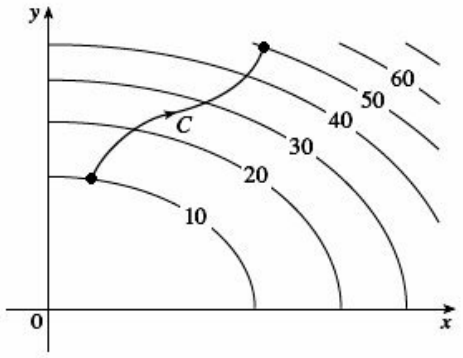
Nota 5.5. Observar que el teorema (5.3) y la nota precedente se pueden enunciar:

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$$

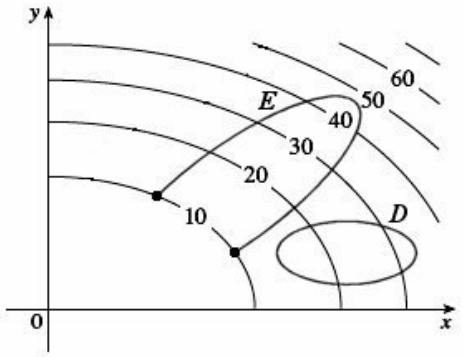
Ejercicio 5.1. Considerar el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x, y) = (2x \sin y, x^2 \cos y + 2y)$ y C una curva que va del punto $A = (1, -\pi)$ al punto $B = (1, \pi)$. Calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$.

5.4 Actividades

1) a) En el siguiente gráfico se muestra una curva C y las curvas de nivel de un campo escalar f diferenciable con gradiente continuo. Hallar el valor de $\int_C \nabla f \cdot d\overrightarrow{r}$.



b) Idem ejercicio precedente, para las curvas D y E:



2) Para el campo vectorial dado $\overrightarrow{F}$, encontrar una función f tal que $\nabla f = \overrightarrow{F}$ y usar esta función para calcular $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ para la curva dada C.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (y, x+2y)$, C es el semicírculo superior que parte en $(0,1)$ y termina en $(2,1)$.

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (\frac{y^2}{1+x^2}, 2y \arctan x)$, $\quad C: r(t) = (t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1$.

c) $\int_C yzdx + xzdy + (xy+2z)dz$, C el segmento de recta que va del $(1,0,-2)$ al punto $(4,6,3)$.

3) Establecer si las siguientes integrales de línea son o no independientes de la trayectoria. Evaluar la integral propuesta.

a) $\int_C \tan y dx + x \sec^2 y dy$, C es *una* curva que va del origen al punto $(1,1)$.

b) $\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^x dy$, C es *una* curva que va del $(-1,1)$ al punto $(1,1)$.

c) $\int_C ydx+xdy+xyzdz$, C el segmento de recta que va del origen al punto $(1,1,1)$.

4) Sea $\overrightarrow{F} = \nabla f$, donde $f(x,y) = \sin(x-2y)$. Determinar curvas *no cerradas* C_1 y C_2 de modo que:

a) $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$ *b)* $\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 1$

5) Determinar, en caso que exista, una valor del parámetro k de modo que el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (kx-y, y-2k)$$

sea conservativo.

Respuesta. $k = 0.5$

6) Para el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{-y\widehat{\imath} + x\widehat{\jmath}}{x^2+y^2}$:

a) Comprobar que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

b) Sean C_1 y C_2 las semi circunferencias superior e inferior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1, respectivamente. Calcular $\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ y $\int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$. ¿Qué se puede concluir?.

c) La conclusión precedente, ¿contradice el teorema 5.3?.

7) Como se comentó en el ejercicio (6) de las actividades (1.4), el campo gravitacional viene dado por:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(\overrightarrow{x}) = -\frac{mMG}{||\overrightarrow{x}||^3}\overrightarrow{x}$$

Verificar que el trabajo realizado por este campo vectorial al mover una partícula desde el punto $(4,0,0)$ al punto $(0,0,2)$ es igual a $\frac{1}{4}mMG$.

Hint. Verificar que $f(x,y,z) = \dfrac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es una función potencial de $\overrightarrow{F}$.

5.5 Desafío

Sea $\overrightarrow{F}$ un campo de fuerza de la forma

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = \frac{k\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||^3}$$

para alguna constante k y con $\overrightarrow{r} = x\widehat{\imath} + y\widehat{\jmath} + z\widehat{k}$.

Calcular el trabajo realizado al mover un objeto desde un punto P_1 hasta un punto P_2 a través de un camino suave, en término de las distancias d_1 y d_2 de estos puntos al origen.
Hint. ¿Qué es $f(\overrightarrow{r}) = \dfrac{k}{||\overrightarrow{r}||}$ de $\overrightarrow{F}$?.