

Superficies paramétricas

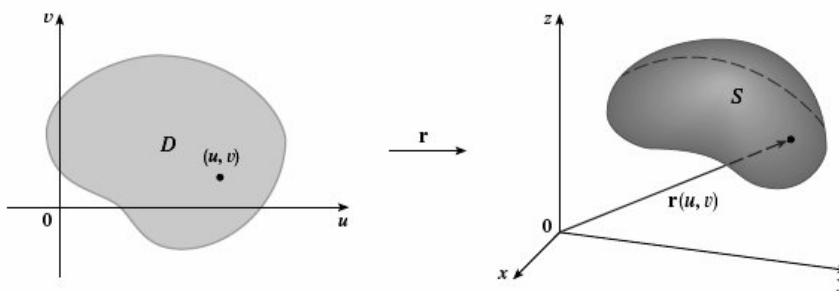
7.1 Introducción

En este curso ya se han estudiado superficies S que corresponden a gráficos de funciones de dos variables con dos tipos de representaciones:

- *Representación explícita* de S , cuando la ecuación que define a S es del tipo $z = f(x, y)$, como por ejemplo, el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$, y
- *Representación implícita* de S , cuando la ecuación que define a S es del tipo $F(x, y, z) = 0$, como por ejemplo, la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

En esta sesión se estudia otra forma de presentar una superficie, llamada forma paramétrica.

7.2 Representación paramétrica de superficies



Sea D una región del plano UV y

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \quad (7.1)$$

una función vectorial de D en $\mathbb{R}^3$. Cuando (u, v) varía en D , los puntos imágenes (x, y, z) con

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (7.2)$$

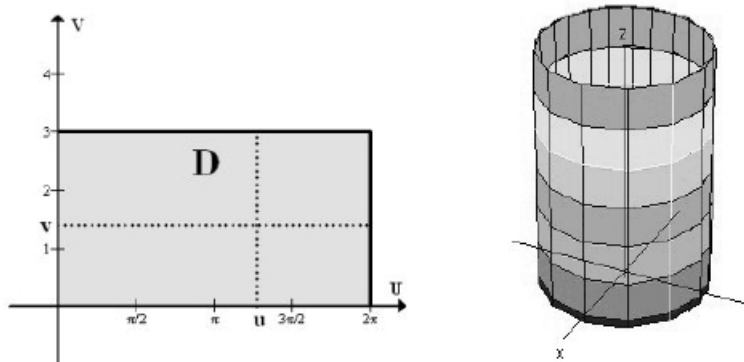
describen una superficie S , llamada *superficie paramétrica*, la ecuación (7.1) se denomina *ecuación vectorial* de S y las ecuaciones (7.2) se denominan *ecuaciones paramétricas* de S .

Ejemplo 7.1. Considerar la superficie con las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u, v) = 2 \cos u \quad y = y(u, v) = 2 \sin u \quad z = z(u, v) = v \quad (7.3)$$

con $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 3]$.

En este caso, es fácil verificar que $x^2 + y^2 = 4$. Luego esta superficie corresponde a una porción de este cilindro con $z (= v)$ entre 0 y 3.



Ejemplo 7.2. Representación paramétrica de una esfera.

Usando las coordenadas esféricas, se tiene que

$$x = x(u, v) = a \sin u \cos v \quad y = y(u, v) = a \sin u \sin v \quad z = z(u, v) = a \cos u \quad (7.4)$$

con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$, corresponden a ecuaciones paramétricas de una esfera centrada en el origen y de radio a . Verificarlo!.

Ejemplo 7.3. Representación paramétrica de un cono.

Una ecuación paramétrica del cono

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2$$

viene dada por

$$S : \begin{cases} x = av \cos u \\ y = av \sin u \\ z = v \end{cases}$$

con $0 \leq u \leq 2\pi$, $v \in \mathbb{R}$.

Nota 7.1. Cuando una superficie S viene dada por la ecuación $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in D$ una parametrización de S viene dada por

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

con $(u, v) \in D$.

Así por ejemplo, una parametrización de la silla de montar $z = x^2 - y^2$ con $|x| + |y| \leq 1$, es $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, con $|u| + |v| \leq 1$.

Nota 7.2. Recordar que para una superficie con ecuación explícita $z = f(x, y)$, la ecuación del plano tangente en su punto $P = (a, b, c)$, viene dado por:

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

y cuando su ecuación viene dada en forma implícita, $F(x, y, z) = 0$, la ecuación del plano tangente en P viene dada por

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0$$

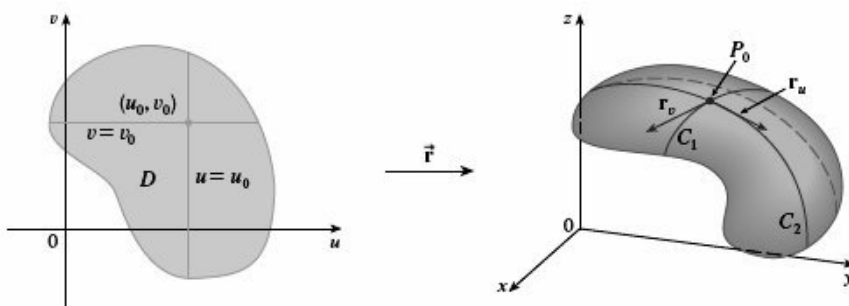
A continuación se revisa la formula del plano tangente a una superficie definida paramétricamente.

7.3 Plano tangente a una superficie paramétrica

Consideremos la superficie paramétrica S :

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\hat{i} + y(u, v)\hat{j} + z(u, v)\hat{k} \quad (7.5)$$

de $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$:



Sea (u_0, v_0) un punto interior a D y $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ su correspondiente imagen. La imagen del segmento de ecuación $u = u_0$ (en D), es una curva $C_1 : \vec{r}(u_0, v)$ sobre S que tiene a

$$\vec{r}_v = x_v(u_0, v_0)\hat{i} + y_v(u_0, v_0)\hat{j} + z_v(u_0, v_0)\hat{k}$$

como vector tangente en P_0

Análogamente, la imagen del segmento de ecuación $u = v_0$ (en D), es una curva $C_2 : \vec{r}(u, v_0)$ sobre S que tiene a

$$\vec{r}_u = x_u(u_0, v_0)\hat{i} + y_u(u_0, v_0)\hat{j} + z_u(u_0, v_0)\hat{k}$$

como vector tangente en P_0 .

Luego, si $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ es un vector no nulo, es un vector normal a la superficie S en P_0 . Cuando este vector nunca se anula, se dice que la superficie es *suave*. Así entonces, para una superficie suave el plano tangente es el plano que pasa por el punto P_0 y tiene como vector normal al vector $\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.

Ejemplo 7.4. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$ en su punto correspondiente a $u = 1$ y $v = 1$.

Desarrollo: Es claro que:

- $\vec{r}(u, v) = u^2\hat{i} + v^2\hat{j} + uv\hat{k}$
- $\vec{r}_u(u, v) = 2u\hat{i} + v\hat{k}$
- $\vec{r}_v(u, v) = 2v\hat{j} + u\hat{k}$
- $\vec{r}_u(1, 1) \times \vec{r}_v(1, 1) = (2\hat{i} + \hat{k}) \times (2\hat{j} + \hat{k}) = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

Luego, el plano tangente buscado es el plano que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular al vector $(-2, -2, 4)$. Luego su ecuación es:

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) + 4(z - 1) = 0$$

es decir,

$$x + y - 2z = 0.$$

7.4 Área de una superficie paramétrica

Definición. El área de una superficie S suave, definida paramétricamente, con ecuaciones paramétricas (7.1), viene dada por

$$\text{Área de } S = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA \quad (7.6)$$

Ejemplo 7.5. Verificar que el área de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.

Desarrollo: Trabajando con las ecuaciones (7.4), se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= (-a \sin v \cos u, a \sin v \cos u, 0) \\ \vec{r}_v &= (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, -a \sin v)\end{aligned}$$

Luego, $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = a^2 \sin v$. Luego,

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{a^4 \sin^2 v} du dv = 4\pi a^2.$$

7.5 Actividades

1) Verificar que las ecuaciones paramétricas:

$$x = x(u, v) = u \sin \alpha \cos v \quad y = y(u, v) = u \sin \alpha \sin v \quad z = z(u, v) = u \cos \alpha$$

con $u \geq 0$ y $v \in [0, 2\pi]$, representan un cono.

2) Encontrar una representación paramétrica de las siguientes superficies

- a) $z = x^2 + 3y^2$.
- b) $3x + 2y - z = 4$
- c) $y^2 + z^2 = 4$
- d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

3) Hallar una ecuación del plano tangente a las superficies paramétricas:

- a) $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v$; en su punto $(2, 3, 0)$.
- b) $x = u^2 - v^2, \quad y = u + v, \quad z = u^2 + 4v$; en su punto $(-1/4, 1/2, 2)$.
- c) $x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = u^2 + v^2$; en su punto correspondiente a $u = 1$ y $v = 1$.

Respuesta. (a) $3x - y + 3z = 3$

4) Verificar que la ecuación del plano tangente a la superficie S de función vectorial $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ en su punto $P = (u_0, v_0)$, se puede presentar por

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

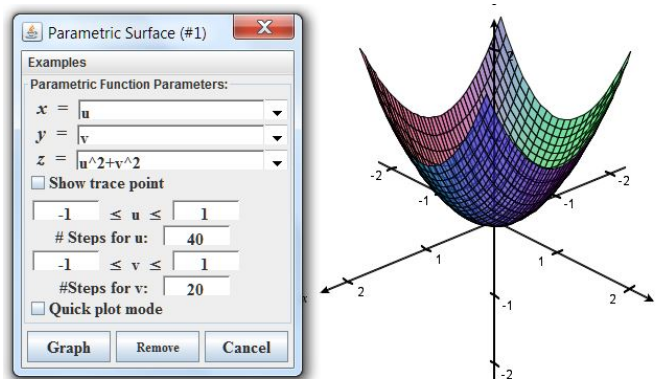
- 5) Comprobar, a partir de (7.6), que área de una superficie con ecuación explícita $z = f(x, y)$ con dominio D , viene dada por

$$\iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dA$$

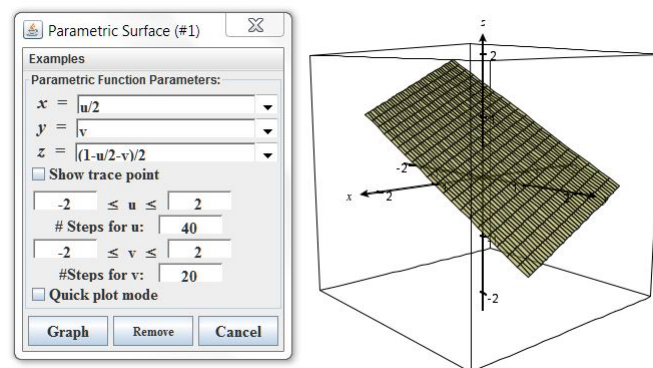
- 6) Comprobar que el área del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ para $0 \leq z \leq a$ es $\pi\sqrt{2}a^2$.
- 7) Verificar que el área del paraboloide $S : z = x^2 + y^2$, para $0 \leq z \leq 6$ es $62\pi/3$.
- 8) Comprobar que el área de la parte del plano $x + 2y + z = 4$ que se encuentra al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ es igual a $4\sqrt{6}\pi$.

7.6 APENDICE: Ecuaciones paramétricas de algunas superficies

- 1) Paraboloide*

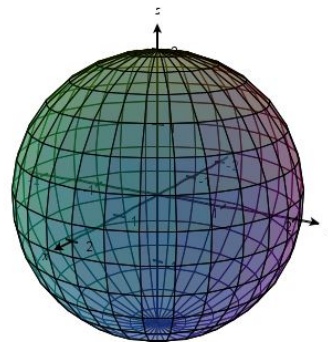
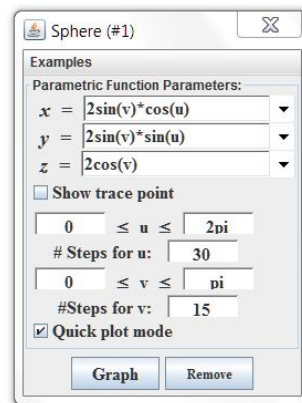


- 2) Planos

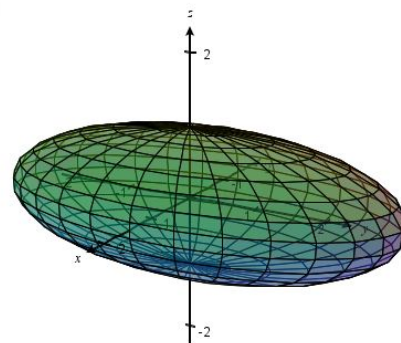
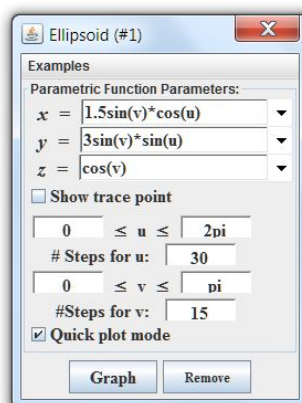


* Los siguientes gráficos se realizaron con el applet CalcPlot3D, disponible (on line) en <http://web.monroec.edu/manila/webfiles/calcNSF/JavaCode/CalcPlot3D.htm>

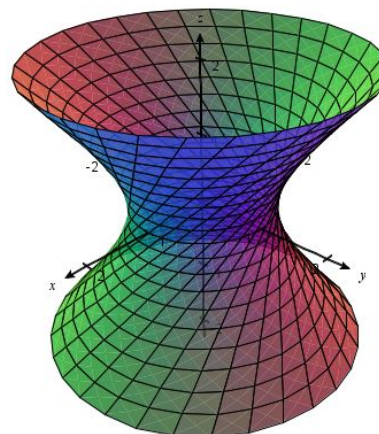
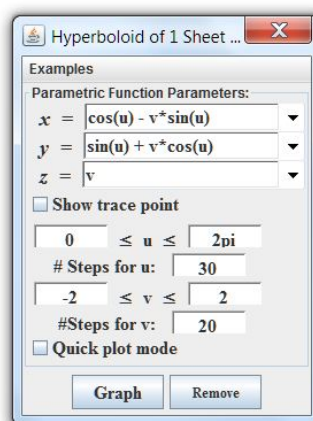
3) Esfera



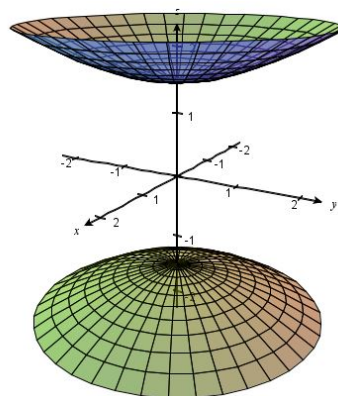
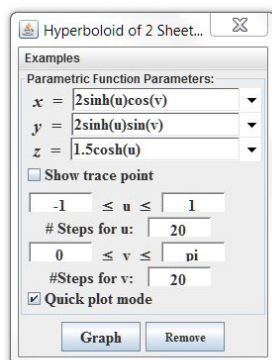
4) Elepsoide



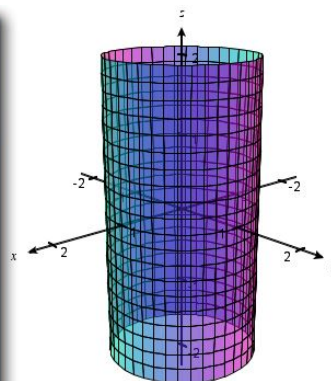
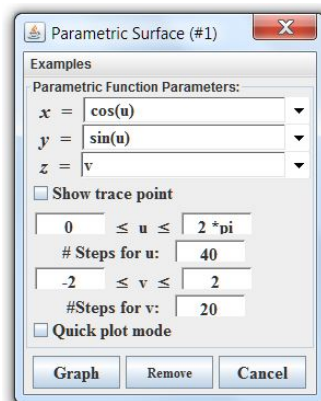
5) Hiperboloide de una hoja



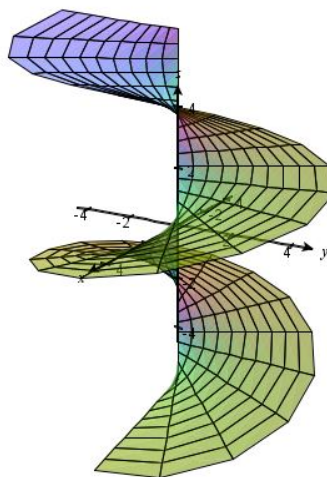
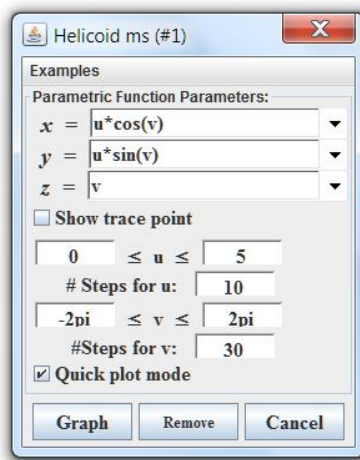
6) Hiperboloide de dos hojas



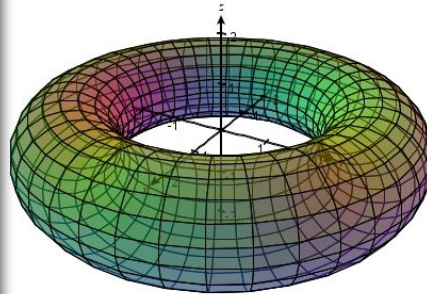
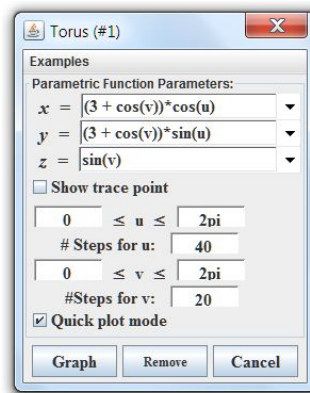
7) Cilindro



8) Helicoide



9) Toro



10) Trompeta

