
Teorema de Gauss

9.1 Introducción

En la presente sesión se revisa un teorema clave del cálculo vectorial, el *teorema de Gauss* o *teorema de la divergencia*. Este teorema establece una relación entre una integral de superficie sobre una superficie cerrada y una integral triple sobre el sólido delimitado por esta superficie.



*Carl Friedrich Gauss**

* Matemático alemán, 1777-1855. Gauss trabajó en una amplia variedad de campos tanto de la matemática como de la física incluyendo la teoría de números, análisis, geometría diferencial, geodesia, magnetismo, astronomía y óptica. Su trabajo ha tenido una gran influencia en diversas áreas.

9.2 Primera forma vectorial del Teorema de Green

Recordemos que si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son campos escalares C^1 en un dominio D de \mathbb{R}^2 y C la curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de la región D , entonces el teorema de Green establece que:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (9.1)$$

Sea C dada por su ecuación vectorial:

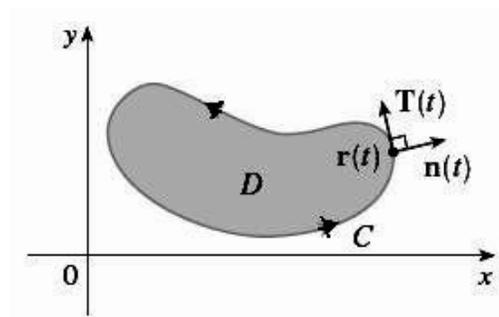
$$C: \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, \quad a \leq t \leq b$$

entonces el vector tangente unitario a C , viene dado

$$\vec{T}(t) = \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{i} + \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{j}$$

de donde el vector normal unitario exterior es

$$\vec{n}(t) = \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{i} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{j}$$



Luego, haciendo $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j}$, se tiene

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds &= \int_a^b (\vec{F} \cdot \vec{n})(t) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} - \frac{Q(x(t), y(t))x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right] \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))y'(t) dt - \int_a^b Q(x(t), y(t))x'(t) dt \\ &= \int_C P dy - Q dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dx dy \end{aligned}$$

Así entonces, la primera forma vectorial del Teorema de Green, que recibe el nombre de *Teorema de Gauss* (o de la *divergencia*) en el plano, es:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dA \quad (9.2)$$

que establece que la integral de línea de la componente normal de \vec{F} a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de \vec{F} sobre la región D encerrada por la curva C .

Nota 9.1. El teorema de Gauss en el plano tiene una extensión natural al espacio \mathbb{R}^3 , conocido con el nombre de Teorema de Gauss:

9.3 Teorema de Gauss

Sea E una región sólida simple* en \mathbb{R}^3 y sea S la superficie cerrada correspondiente a la frontera de E con orientación positiva†. Sea $\vec{F} = (P, Q, R)$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a E , entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div}(\vec{F}) dV \quad (9.3)$$

o bien,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \quad (9.4)$$

Ejemplo 9.1. Comprobar el teorema de Gauss para $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ y E la región sólida encerrada por el paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

Desarrollo: En la actividad 6 del tema sobre integrales de superficies se verificó que

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{2} \quad (9.5)$$

Ahora bien,

$$\iiint_E \text{div}(\vec{F}) dV = \iiint_E dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} r dz dr d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (9.6)$$

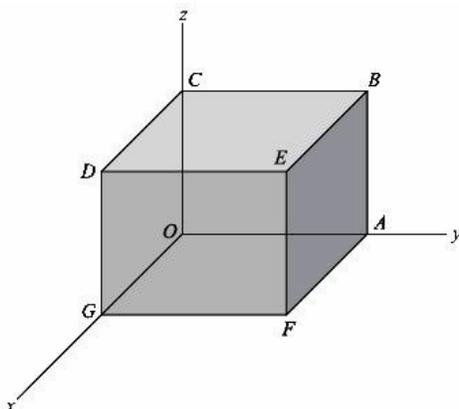
Luego (9.5) y (9.6) comprueban (9.3) para el campo vectorial y sólido de este ejemplo.

* Aquí E corresponde a uno de los tipos considerados en el cálculo de las integrales triples.

† Orientación positiva corresponde a trabajar con el vector normal unitario *exterior*.

9.4 Actividades

- 1) Verificar el teorema de Gauss para $\vec{F}(x, y, z) = (2x - z)\hat{i} + x^2y\hat{j} - xz^2\hat{k}$ tomada sobre la superficie S correspondiente al siguiente cubo de lado 1:



Respuesta.

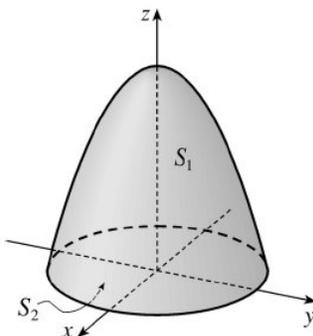
$$\iint_{DEFG} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 1.5, \iint_{ABCO} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.5, \iint_{ABEF} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 1/3, \iint_{OGDC} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{BCDE} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -0.5, \iint_{AFGO} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0, \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 11/6, \iiint_V \text{div}(\vec{F}) dV = 11/6.$$

- 2) Verificar el teorema de Gauss para $\vec{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + xy\hat{j} + z\hat{k}$ y S la superficie acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano XY .

Respuesta. $\iiint_V \text{div}(\vec{F}) dV = 8\pi, \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 8\pi, \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0.$

Donde S_1 es la parte de la superficie en el paraboloide y S_2 la parte de la superficie en el plano XY .



3) Comprobar que $\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} dS = 3 \text{vol}(V)$, donde S es una superficie cerrada encerrando un sólido V y $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$.

4) Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = 3xy^2 \hat{i} + xe^z \hat{j} + z^3 \hat{k}$ a través de la superficie acotada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$.
Respuesta. $\frac{9\pi}{2}$.

5) Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + y \sin z) \hat{i} + (y^3 + z \sin x) \hat{j} + 3z \hat{k}$ a través de la superficie acotada por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.
Respuesta. $\frac{194\pi}{5}$.

6) Usar el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$, donde S es la esfera unitaria centrada en el origen.

Hint: En este caso $\vec{F} \cdot \vec{n} = 2x + 2y + z^2$ y como para la esfera $\vec{n} = \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$, se tiene que $\vec{F} = 2 \hat{i} + 2 \hat{j} + z \hat{k}$. Respuesta. $\frac{4\pi}{3}$

7) Sea E un sólido con frontera S . Comprobar que

a) $\iint_S \vec{a} \cdot \hat{n} dS = 0$, donde \vec{a} es un vector constante.

b) $\text{vol}(E) = \frac{1}{3} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{F}(x, y, z) = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$.

c) $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$