1) Divergencia y rotor de un campo vectorial

$$a) \operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$b) \operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

2) Integral de línea

a) Integral de línea de un campo vectorial

Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{i} + Q(x, y, z)\hat{j} + R(x, y, z)\hat{k}$$

un campo vectorial continuo definido sobre una región que contiene la curva suave

$$C: \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}, \quad \text{con } a \leq t \leq b \quad (1)$$

La integral de línea del CV $\vec{F}$ sobre la curva C se anota y define por:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

b) Integral de línea de un campo escalar

Sea f un campo escalar y C la curva (1). La integral de línea del CE f sobre la curva C se anota y define por:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) s'(t) dt$$

donde s es la función longitud de arco de la curva C , es decir, $s = s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du$, de donde

$$s'(t) = \|r'(t)\| \quad \text{o bien} \quad ds = \|r'(t)\| dt$$

3) Campo vectorial conservativo

a) Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice *campo vectorial conservativo*, cuando existe un campo escalar f , de modo que $\vec{F} = \nabla f$. En tal caso, la función f recibe el nombre de *función potencial de $\vec{F}$*

b) Criterio de las componentes

i) Sea $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$ un campo vectorial sobre un disco abierto de $\mathbb{R}^2$, con P y Q funciones C^1 en este disco, entonces

$$\vec{F} \text{ es conservativo} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ii) Si $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ es un campo vectorial sobre una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$, con sus componentes C^1 en esta esfera, se tiene que

$$\vec{F} \text{ es conservativo} \iff \operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

4) Teorema de Green

Sea $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ campos escalares C^1 en un dominio D de $\mathbb{R}^2$. Sea C la curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de la región D , entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

o bien,

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

5) Integral de superficie

a) Campo escalar sobre una superficie definida paramétricamente

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA$$

b) Campo vectorial sobre una superficie definida paramétricamente

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA$$

c) Area de una superficie

$$\text{Area de } S = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dA$$

6) Teorema de Gauss

Sea E una región sólida simple en $\mathbb{R}^3$ y sea S la superficie cerrada correspondiente a la frontera de E con orientación positiva. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a E , entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \text{div}(\vec{F}) dV$$

7) Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada y suave en $\mathbb{R}^3$ (con vector unitario exterior $\hat{n}$) y sea C la curva correspondiente a la frontera de S con orientación positiva. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a S , entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$$