Prof. C. del Pino O.

1) **Campos escalares y vectoriales**

   a) **Campos escalares**
   Un *campo escalar* es una función de $D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$, es decir se llama *campo escalar* a una función de varias variables. Luego, asociado a un campo escalar están todos los conceptos ya estudiados (Unidades 1 y 2): derivadas parciales, derivadas direccionales, gradientes, etc.

   b) **Campos vectoriales**
   Se denomina *campo vectorial en* $\mathbb{R}^n$ a una función de $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$). En este curso se trabajará de preferencia los casos $n = 2$ y $n = 3$.
   Un campo vectorial es una función de $D \subset \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ o de $D \subset \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

2) **Divergencia y rotor de un campo vectorial**

   a) $div(\overrightarrow{F}) = \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \dfrac{\partial P}{dx} + \dfrac{\partial Q}{dy} + \dfrac{\partial R}{dz}$

   b) $rot(\overrightarrow{F}) = \nabla \times \overrightarrow{F} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\widehat{\imath} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\widehat{\jmath} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\widehat{k}$

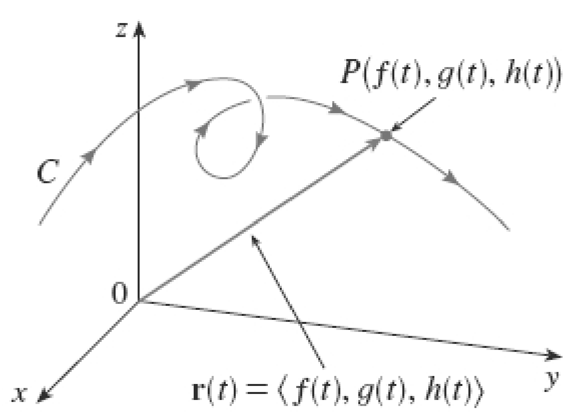
3) **Curvas en el plano y el espacio**

   Informalmente se denomina *curva* a la traza de una partícula que se mueve en el plano o el espacio.

   Formalmente, se llama *curva en el espacio* al gráfico de una función

$$\overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\overrightarrow{i} + f_2(t)\overrightarrow{j} + f_3(t)\overrightarrow{k} = (f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t)) \tag{1}$$

   donde f_1, f_2 y f_3 son funciones reales definidas en un intervalo I.



Curva en el espacio

Nota: $\overrightarrow{r}(t)$, recibe el nombre de función vectorial.

Prof. C. del Pino O.

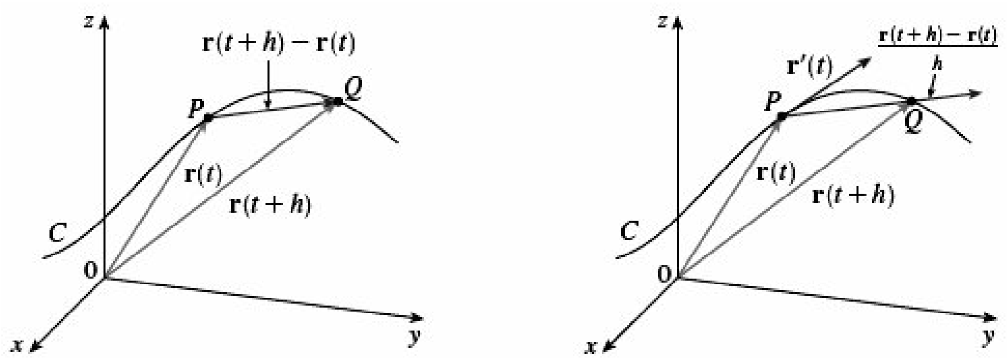
4) **Derivada de una función vectorial**

La derivada $\overrightarrow{r}'$ de una función vectorial del tipo (**??**) se define análogamente al caso de funciones reales:

$$\overrightarrow{r}'(t) = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t+h) - \overrightarrow{r(t)}}{h} \tag{2}$$

siempre que este límite exista.

Geométricamente, $\overrightarrow{r}'(t)$ representa un vector tangente a la curva C en su punto $P = \overrightarrow{r}(t)$ que sigue la dirección del sentido de la curva.



Vectores secante y tangente a una curva

Si

$$\overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\,\hat{\imath} + f_2(t)\,\hat{\jmath} + f_3(t)\,\overrightarrow{k} = (f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t))$$

es una función vectorial con sus funciones componentes diferenciables, entonces

$$\overrightarrow{r}'(t) = f_1'(t)\,\hat{\imath} + f_2'(t)\,\hat{\jmath} + f_3'(t)\,\overrightarrow{k} = (f_1'(t),\, f_2'(t),\, f_3'(t))$$

5) **Integral de línea de un campo vectorial**

Sea

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{\imath} + Q(x,y,z)\,\hat{\jmath} + R(x,y,z)\,\widehat{k}$$

un campo vectorial continuo definido sobre una región que contiene la curva suave

$$C: \quad \overrightarrow{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\widehat{k}, \quad \text{con} \quad a \le t \le b \tag{3}$$

La integral de línea del CV $\overrightarrow{F}$ sobre la curva C se anota y define por:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \tag{4}$$

Nota: En Física, la integral de línea (4) corresponde al trabajo realizado por un campo de fuerzas $\overrightarrow{F}$ para llevar una partícula sobre la curva C, desde $\overrightarrow{r}(a)$ hasta $\overrightarrow{r}(b)$.

6) **Teorema fundamental para integrales de línea**

Sea C una curva suave, contenida en un disco abierto D de $\mathbb{R}^2$ (o una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$), que va desde el punto A hasta el punto B. Si $\overrightarrow{F}$ es una campo vectorial *conservativo* continuo sobre D y φ una función diferenciable, potencial para $\overrightarrow{F}$ ($\nabla\varphi = \overrightarrow{F}$), entonces

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

es independiente de la trayectoria C, y

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

7) **Campo vectorial conservativo**

a) Un campo vectorial $\overrightarrow{F}$ se dice *campo vectorial conservativo*, cuando existe un campo escalar f, de modo que $\overrightarrow{F} = \nabla f$. En tal caso, la función f recibe el nombre de *función potencial de* $\overrightarrow{F}$

b) *Criterio de las componentes*

i) Sea $\overrightarrow{F} = P\,\hat{\imath} + Q\,\hat{\jmath}$ una campo vectorial sobre un disco abierto de $\mathbb{R}^2$, con P y Q funciones C^1 en este disco, entonces

$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ii) Si $\overrightarrow{F} = P\,\hat{\imath} + Q\,\hat{\jmath} + R\,\hat{k}$ es un campo vectorial sobre una esfera abierta de $\mathbb{R}^3$, con sus componentes C^1 en esta esfera, se tiene que

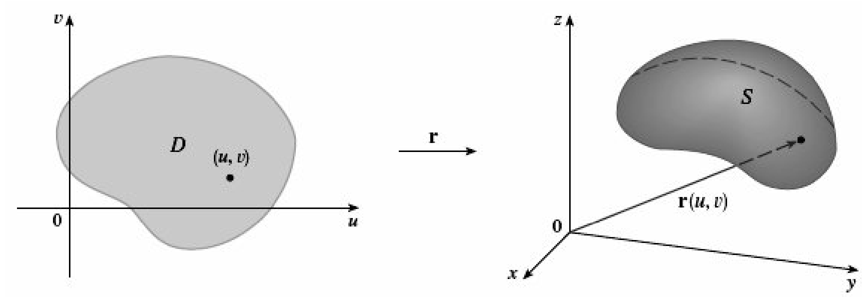
$$\overrightarrow{F} \text{ es conservativo} \quad \Longleftrightarrow \quad rot(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

8) **Teorema de Green**

Sea $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, con $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ campos escalares C^1 en un dominio D de $\mathbb{R}^2$. Sea C la curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de la región D, entonces

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{r} = \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy$$

9) **Superficies paramétricas**



Sea D una región del plano UV y

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\widehat{i} + y(u,v)\widehat{j} + z(u,v)\widehat{k} \tag{5}$$

una función vectorial de D en $\mathbb{R}^3$. Cuando (u,v) varía en D, los puntos imágenes (x,y,z) con

$$x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v) \tag{6}$$

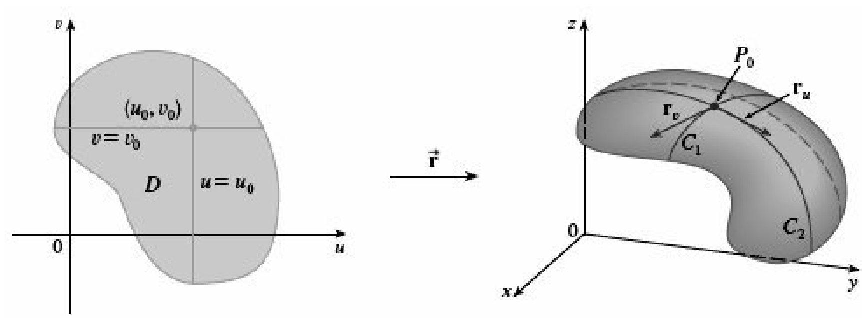
describen una superficie S, llamada *superficie paramétrica*, la ecuación (5) se denomina *ecuación vectorial* de S y las ecuaciones (6) se denominan *ecuaciones paramétricas* de S.

10) **Plano tangente a una superficie paramétrica**

Consideremos la superficie paramétrica S:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = x(u,v)\widehat{i} + y(u,v)\widehat{j} + z(u,v)\widehat{k} \tag{7}$$

de $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$:



Sea (u_0, v_0) un punto interior a D y $P_0 = \overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ su correspondiente imagen. La imagen del segmento de ecuación $u = u_0$ (en D), es una curva $C_1 : \overrightarrow{r}(u_0, v)$ sobre S que tiene a

$$\overrightarrow{r}_v = x_v(u_0,v_0)\widehat{i} + y_v(u_0,v_0)\widehat{j} + z_v(u_0,v_0)\widehat{k}$$

como vector tangente en P_0

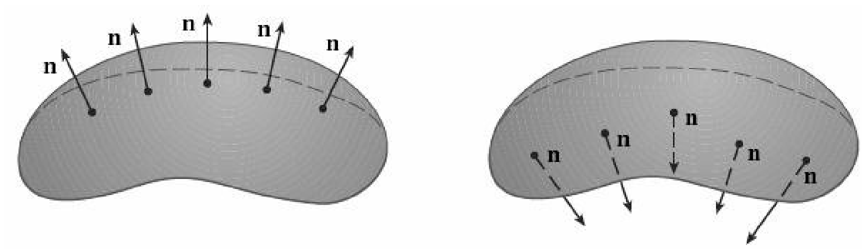
Análogamente, la imagen del segmento de ecuación $u = v_0$ (en D), es una curva $C_2 : \overrightarrow{r}(u, v_0)$ sobre S que tiene a

$$\overrightarrow{r}_u = x_u(u_0, v_0)\widehat{i} + y_u(u_0, v_0)\widehat{j} + z_u(u_0, v_0)\widehat{k}$$

como vector tangente en P_0.

Luego, si $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ es un vector no nulo, es un vector normal a la superficie S en P_0. Cuando este vector nunca se anula, se dice que la superficie es *suave*. Así entonces, para una superficie suave el plano tangente es el plano que pasa por le punto P_0 y tiene como vector normal al vector $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$.

11) **Superficies orientadas**



Una superficie S se dice *orientada* u *orientable*, cuando es posible elegir un vector unitario normal en cada uno de sus puntos, de modo que este vector varíe continuamente en S. La elección de este vector entrega una orientación de S. Toda superficie orientable tiene 2 posibles orientaciones.

Observaciones:

- Para una superficie suave orientable $\overrightarrow{r}(u, v)$, se tiene la orientación entregada por

$$\widehat{n} = \frac{\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v}{||\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v||}$$

- Para una superficie cerrada, se acostumbra considerar la orientación positiva cuando se eligen los vectores normales unitarios *apuntando hacia afuera* de la superficie.
- Una superficie S orientada, se suele anotar por $\overrightarrow{S}$.

12) **Integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie definida paramétricamente**

Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial continuo sobre $\mathbb{R}^3$ y S una superficie orientada definida paramétricamente por $\overrightarrow{r}(u, v)$. La *integral de superficie* de $\overrightarrow{F}$ sobre la sobre la superficie S, se anota y define por

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} \quad = \quad \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}\, dS = \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u, v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v)\, dA \tag{8}$$

Nota:

a) La integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie S, recibe el nombre de flujo de $\overrightarrow{F}$ a través de S.

b) Cuando S viene definida explícitamente por la ecuación $z = g(x, y)$ y se ha elegido su orientación *hacia arriba*, la integral de superficie (6) se expresa por

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D \overrightarrow{F}(x, y, g(x, y)) \cdot (-g_x \hat{\imath} - g_y \hat{\jmath} + \widehat{k})\; dA$$

13) **Teorema de Gauss**

Sea E una región sólida simple en $\mathbb{R}^3$ y sea S la superficie cerrada correspondiente a la frontera de E con orientación positiva. Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a E, entonces

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_E div(\overrightarrow{F})\, dV$$

14) **Teorema de Stokes**

Sea S una superficie orientada y suave en $\mathbb{R}^3$ (con vector unitario exterior $\widehat{n}$) y sea C la curva correspondiente a la frontera de S con orientación positiva. Sea $\overrightarrow{F}$ un campo vectorial con componentes C^1 sobre una región que contiene a S, entonces

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{S}$$