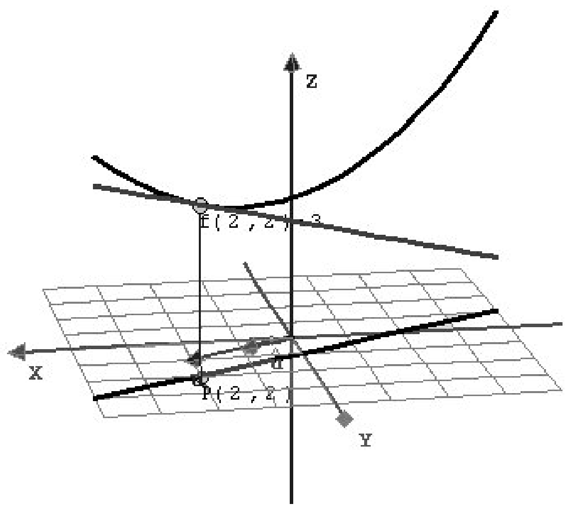
Temas: Derivadas direccionales.

1. © **Derivadas direccionales**



Definición: Sea $w = f(x,y)$ una función de dos variables y sea $\widehat{u} = u_1\widehat{i} + u_2\widehat{j}$ un vector *unitario*. La *derivada direccional de f en $P(x,y)$ en la dirección de $\widehat{u}$*, se denota por $D_{\overrightarrow{u}}f(x,y)$ y se define por

$$D_{\widehat{u}}f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

Teorema: Sea f una función diferenciable de dos variables y $\widehat{u} = u_1\widehat{i} + u_2\widehat{j}$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\widehat{u}}f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2$$

2. ✓ Obtener la derivada direccional de la función $U = U(x,y) = 5x^2 - 3x + y^2 - 2$ en el punto $(1,2)$ según la dirección del vector $\overrightarrow{v} = \widehat{i} - 2\widehat{j}$.

3. ✓ Hallar la derivada de la función $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ en el punto $M(2,1)$ según la dirección de la recta que une este punto con el punto $N(5,5)$.

4. © **Definición**: Sea $w = f(x,y)$ una función de dos variables. El gradiente de f es

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,u)) = f_x(x,y)\widehat{i} + f_y(x,y)\widehat{j}$$

Nota: Luego de la definición precedente, se tiene

$$D_{\overrightarrow{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \widehat{u}.$$

Teorema: Sea f una función de dos variables diferenciable en un punto $P(x, y)$:

a) La tasa de crecimiento máxima de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $\nabla f(x, y)$.

b) El valor máximo de $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $||\nabla f(x, y)||$.

Corolario: Sea f una función de dos variables diferenciable en un punto $P(x, y)$:

a) La tasa mínima de crecimiento (o máxima de decrecimiento) de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $-\nabla f(x, y)$.

b) El valor mínimo de $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $-||\nabla f(x, y)||$.

5. ✓ Calcular el valor máximo de la derivada direccional de la función $V = V(x, y, z) = yz^2 + x^2z + xy^2$ en el punto $(1, 2, 3)$, así como la dirección donde ésta tiene lugar.

6. © Los conceptos relacionados con derivadas direccionales, se extienden naturalmente para funciones de más variables. Por ejemplo:

   - $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y, z) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(x + su_1, y + su_2, z + su_3) - f(x, y, z)}{s}$
   - $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\overrightarrow{i} + f_y(x, y, z)\overrightarrow{j} + f_z(x, y, z)\overrightarrow{k}$
   - $D_{\overrightarrow{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \overrightarrow{u} = f_x(x, y, z)u_1 + f_y(x, y, z)u_2 + f_z(x, y, z)u_3$

7. ✓ La temperatura en el punto (x, y, z) está dada por $T = T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ donde T se mide en grados celcius y x, y, z se miden en metros.

   a) Encontrar la razón de cambio de la temperatura, en el punto $P(2, -1, 2)$ en la dirección hacia el punto $Q(3, -3, 3)$.

   b) ¿En qué dirección aumenta mas rápidamente la temperatura en P? ¿Cuál es la máxima razón de aumento en T en P?.