

Temas: Extremos (relativos/absolutos) de una función de dos variables. Puntos críticos. Criterio para estudiar puntos críticos. Extremos, gráficos y curvas de nivel.

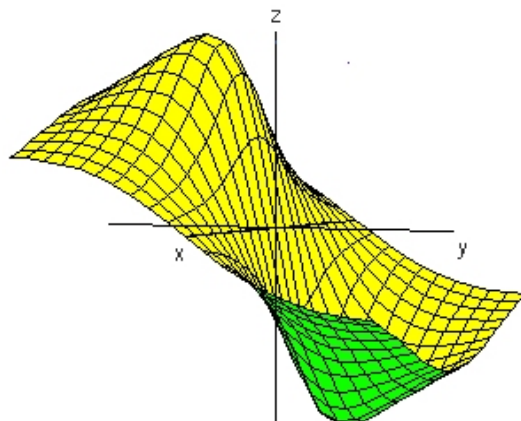


Gráfico de $z = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$

1. Extremos de una función de dos variables.

Definición: Sean $f : D \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ una función de dos variables y (a, b) un punto en el interior de D . Se dice que f tiene en (a, b) un *máximo relativo (local)*, cuando, para todo (x, y) en las cercanías de (a, b) , se cumple:

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

Análogamente, se dice que f tiene en (a, b) un *mínimo relativo (local)*, cuando, para todo (x, y) en las cercanías de (a, b) , se cumple: $f(x, y) \geq f(a, b)$

Observaciones.

- En general, se usa la palabra *extremo* para referirse a un máximo o un mínimo.
- Si las desigualdades incluidas en la definición anterior se cumplen para todos los puntos (x, y) del dominio D de f , entonces los extremos reciben el nombre de *máximo absoluto* y *mínimo absoluto*, respectivamente.

2. Criterio de la derivadas parciales para extremos.

Teorema: Si f tiene un extremo relativo en (a, b) , y f tiene derivadas de primer orden en (a, b) , entonces:

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0$$

Observaciones:

- Es posible que en un punto, ambas derivadas parciales de una función sean iguales a 0, y que en dicho punto la función no presente un extremo. Tales puntos reciben el nombre de *puntos sillas*. Un ejemplo de esta situación lo presenta la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ (cuya gráfica recibe el nombre de *silla de montar*) en el punto $(0, 0)$.

- Es posible que una función de dos variables, tenga en cierto punto un extremo, y en dicho punto f no tenga derivadas parciales, por ejemplo la función $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$ tiene un máximo en $(0, 0)$, y en este punto dicha función no tiene derivadas parciales.
3. Un punto (a, b) del dominio de una función se dice *punto crítico* de f , cuando
- $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o bien
 - No existe $f_x(a, b)$ o no existe $f_y(a, b)$

Los puntos críticos de una función, son los puntos donde la función puede presentar sus extremos.

4. **Criterio para analizar puntos críticos.**

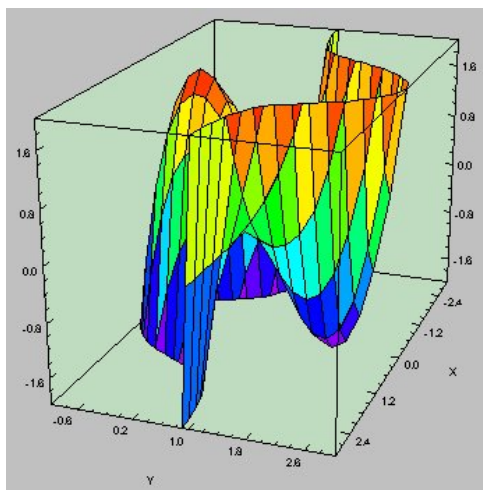
Teorema: Sea $z = f(x, y)$ una función con segundas derivadas parciales continuas en un punto crítico (a, b) para el cual $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.
Sea

$$D = D(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

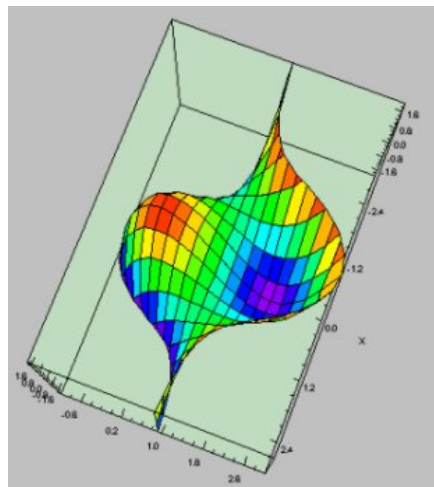
- a) Si $D(a, b) > 0$, entonces f tiene en (a, b) un extremo:
 - Si $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene en (a, b) un mínimo relativo igual a $f(a, b)$.
 - Si $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene en (a, b) un máximo relativo igual a $f(a, b)$.
- b) Si $D(a, b) < 0$, entonces f no tiene extremo en (a, b) . En este caso, f tiene en (a, b) un punto silla.
- c) Si $D(a, b) = 0$, **este criterio no entrega información.**

Nota: En caso que el dominio de una función continua f sea acotado y cerrado, f tiene extremos absolutos en D . En tal caso, sus extremos absolutos los puede alcanzar en puntos del interior de D o puntos de la frontera de D .

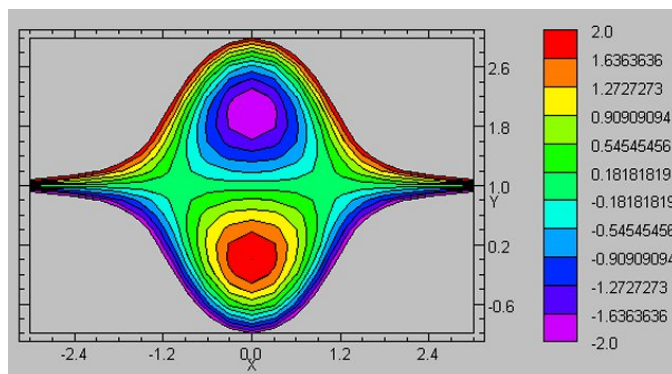
5. Estudiar extremos relativos de $z = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$. Visualizar gráficamente.



Mirada standar



Mirada desde arriba



Curvas de nivel

6. Encontrar los extremos absolutos de $z = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ en el dominio $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Visualizar gráficamente.
7. Encontrar los puntos de la superficie $z^2 = xy + 1$ que estén más cerca del origen.
8. Determinar las dimensiones de la caja rectangular con máximo volumen si el área superficial total es de 64 cm^2 .