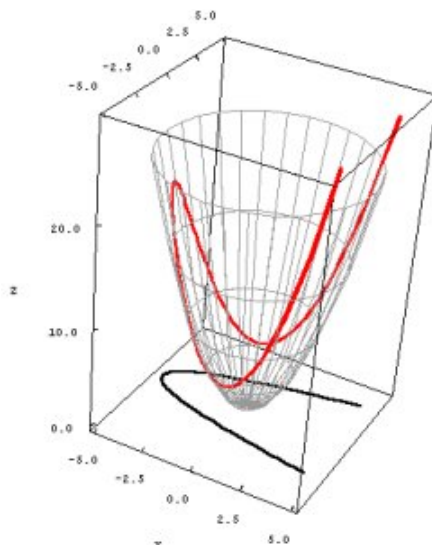


1. Determinar los extremos de $z = f(x, y)$, sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$, consiste en buscar los extremos de $z = f(x, y)$, cuando (x, y) se mueve en la curva $g(x, y) = 0$. Tal problema se suele presentar en la forma:

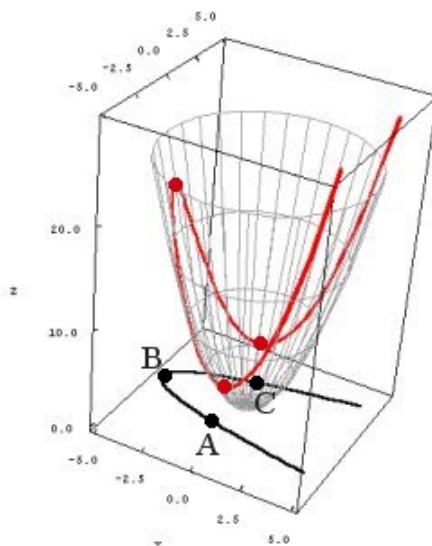
$$\text{Extremos} : z = f(x, y)$$

$$\text{Sujeto a} : g(x, y) = 0$$

En la siguiente figura se muestra gráficamente la situación, para el caso $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y $g(x, y) = y^2 - x - 9/2 = 0$



luego, los puntos que se deben determinar son A, B y C, indicados en la siguiente figura:



2. Un procedimiento que existe para ubicar estos puntos se llama *Método de los Multiplicadores de Lagrange*. Para una explicación de cómo funciona, sea P un punto de la curva restricción $g(x, y) = 0$ (g diferenciable) en el cual la función diferenciable $z = f(x, y)$ presenta un extremo (máximo o mínimo).

- Sea $y = \alpha(x)$ la función que viene definida implícitamente por la restricción $g(x, y) = 0$. Luego,

$$g(x, \alpha(x)) = 0$$

de donde, derivando con respecto a x :

$$\begin{aligned} g_x + g_y \cdot \alpha'(x) &= 0 \\ (g_x, g_y) \cdot (1, \alpha'(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\nabla g \perp (1, \alpha'(x)) \quad (1)$$

Nota: Como el vector $(1, \alpha'(x))$ es tangente a la restricción¹ $g(x, \alpha(x)) = 0$, la relación (1) establece que el gradiente de g es perpendicular a la restricción.

- Por otra parte, es claro que la función (de una variable) $z = f(x, \alpha(x))$ presenta, de acuerdo al supuesto anterior, un extremo en el punto P . Por lo tanto su derivada en P debe anularse. Como

$$z_x = f_x + f_y \cdot \alpha'(x)$$

en P se cumple que

$$z_x = f_x + f_y \cdot \alpha'(x) = 0$$

luego, en P se tiene que

$$\nabla f \perp (1, \alpha'(x)) \quad (2)$$

- De las relaciones (1) y (2) se puede concluir que los vectores ∇f y ∇g son paralelos. Por lo tanto existe un escalar λ tal que

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

- Luego, para determinar las coordenadas del punto P de la curva restricción donde $z = f(x, y)$ asume sus extremos, se debe resolver el siguiente sistema de 3 ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \lambda g_x \\ f_y &= \lambda g_y \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

¹Este resultado se verifica, en general, en la tercera unidad de este curso.

Observaciones.

- Para recordar las ecuaciones anteriores, se suele formar la función:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

y sus tres derivadas parciales igualadas a 0, proporcionan justamente, las ecuaciones comentadas.

- El parámetro λ recibe el nombre *multiplicador de Lagrange*.
- El método de los multiplicadores de Lagrange, solo entrega el punto donde se alcanza el extremo buscado, pero no discrimina si en él se presenta un máximo o mínimo.
- Para el caso de funciones de 3 variables, se tiene que los candidatos a extremos de $z = f(x, y, z)$ bajo la restricción $g(x, y, z) = 0$, provienen de las soluciones del sistema:

$$\begin{array}{lcl} f_x & = & \lambda g_x \\ f_y & = & \lambda g_y \\ f_z & = & \lambda g_z \\ g(x, y, z) & = & 0 \end{array}$$

- Puede suceder que un problema con restricciones, tenga más de una restricción. En tal caso, se incorpora un multiplicador de Lagrange por cada restricción. Por ejemplo, en el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & : z = f(x, y, z) \\ \text{Sujeto a} & : g(x, y, z) = 0 \\ & \text{y} \quad h(x, y, z) = 0 \end{array}$$

la función L es:

$$L = L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) - \mu h(x, y, z)$$

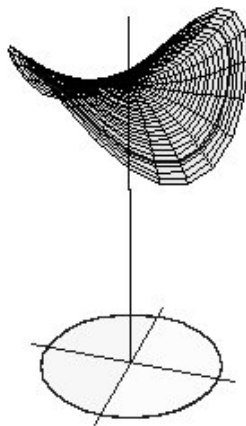
y el sistema, de 5 ecuaciones, a resolver es:

$$\begin{array}{lcl} f_x & = & \lambda g_x + \mu h_x \\ f_y & = & \lambda g_y + \mu h_y \\ f_z & = & \lambda g_z + \mu h_z \\ g(x, y, z) & = & 0 \\ h(x, y, z) & = & 0 \end{array}$$

3. Actividades

a) Determinar

- i) Extremos de $z = f(x, y) = xy + 14$
 Sujeto a $x^2 + y^2 = 18$



(ver en sitio del curso Contenidos – >Unidad 1– >Extremos de FVV– >Ejercicios resueltos 2– >Ejemplo 4)

- ii) Extremos de $z = f(x, y) = x^2 + y^4$
 Sujeto a $x^2 + y^2 = 1$
- iii) Extremos de $z = f(x, y) = x^4 - 4xy + 4y^2$
 Sujeto a $x - 2y = 1$
- iv) Extremos de $u = f(x, y, z) = xyz$
 Sujeto a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
- b) El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloid $z = x^2 + y^2$ en una elipse E .
- Hacer un esbozo de los gráficos del plano, el paraboloid y la elipse.
 - Determinar los puntos *más altos* y *más bajos* de la elipse E .
 - Calcular los puntos de la elipse E que se encuentran *más cerca* y *más alejados* del origen.

- c) Minimizar la expresión $\sum_{i=1}^n a_i x_i$, donde a_i son constantes positivas dadas, si $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$