

Temas: Límites de FVV, Límites por *caminos* (*trayectorias*). Límites iterados. Continuidad.

1. ¿Qué significa que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$?

2. Calcular

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y}{x - \sqrt{y}}$

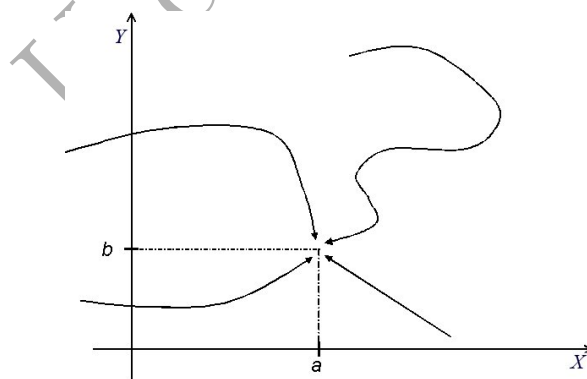
3. Límites y tablas de valores. Revisar applet en el sitio web del curso.

4. *Propiedades de los límites.* Dado que la definición de límite de funciones de dos variables, es esencialmente igual a la definición de funciones de una variable, las propiedades son análogas.

a) Enunciar algunas propiedades para límites de funciones de 2 variables.

b) ¿Estas propiedades son válidas para funciones de más variables?

5. ¿Qué es un camino (trayectoria) que *va* a un punto (a,b) ? En la siguiente figura se muestran 4 caminos por los cuales (x,y) se puede acercar al punto (a,b) .



6. a) **Teorema:**

Sean $z = f(x, y)$ una función de dos variables y C_1 y C_2 dos caminos que *pasan* por el punto (a, b) .

Si $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C_1}} f(x, y) = L_1$ y $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C_2}} f(x, y) = L_2$ con $L_1 \neq L_2$

entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ *no existe*.

b) Estudiar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

7. ¿Cómo estudiar $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$?

- **Límite NO existe.** Para verificar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no existe, usar el teorema precedente. Para ello buscar 2 caminos (diferentes) por los cuales los límites sean distintos.
- **Límite existe.** Para verificar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ existe, y es igual a L , se usa el Teorema del Encajonamiento:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \iff |f(x, y) - L| \leq g(x, y), \text{ con } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = 0$$

Nota: Algunas desigualdades que se pueden usar en la búsqueda de la función $g(x, y)$ son:

- $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x^2 \leq x^2 + y^2, \quad y^2 \leq x^2 + y^2$
- $x^2 \leq \sqrt{x^4 + y^4}, \quad y^2 \leq \sqrt{x^4 + y^4}$

8. Límites y cambio de variable. Estudiar $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

9. Límites y coordenadas polares. Estudiar

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$.

10. Continuidad

- Sabiendo que la definición de continuidad para una función de 2 (o más) variables es, esencialmente, la misma que para funciones de 1 variable, establecer bajo que condiciones se dice que una función $z = f(x, y)$ es continua en (a, b) .
- Dar un ejemplo de una función de continua y otra discontinua en $(0, 0)$.
- Estudiar la continuidad en $(0, 0)$, de las siguientes funciones:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

11. Límites y límites iterados. Completar la siguiente tabla:

Función $f(x, y)$	$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$	$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$	$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$
$\frac{xy}{x^2 + y^2}$			
$x + y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$			
$x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$			
$\frac{xy}{x^2 + y^2} + x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$			
$\frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin\left(\frac{1}{x}\right)$			

¿Qué conclusión puede sacar de esta actividad?