1. Estudiar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   Desarrollo. Método Directo.

   Aquí como $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} xy = 2$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2+y^2) = 5$, se tiene que:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\lim xy}{\lim (x^2+y^2)} = \frac{2}{5}.$$

2. Verificar que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

   Desarrollo.

   Considerar el camino $C_1 : y = x$

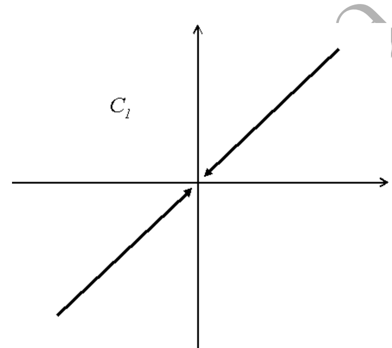

Gráfico del camino C_1

Luego, si $(x,y)\in C_1$. Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1.$

Ahora considerar el camino $C_2 : y = -x$

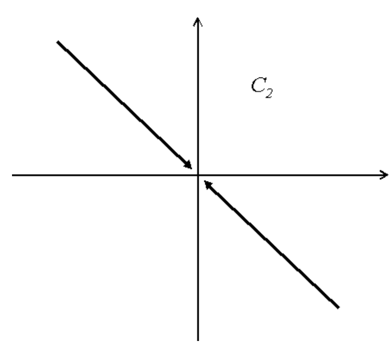

Gráfico del camino C_2

Luego, si $(x, y) \in C_2$. Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2x^2}{x^2+x^2} = -1$.

Como el límite por el camino C_1 es 1 y por el camino C_2 es -1, el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ no existe.

Otra forma Usando familia de rectas que pasan por el $(0, 0)$.
Sea $C : y = mx$ la familia de rectas que pasan por el $(0, 0)$.
Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Luego, como este límite *depende de la pendiente* m, se concluye que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ no existe.

3. Estudiar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$.

   Desarrollo. Cambio de Variable

   Es claro que: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \cdot \dfrac{\sin xy}{xy}$

   Para estudiar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy}$ hacer el cambio de variable: $\alpha = xy$

   (donde $\alpha \to 0$ cuando $\substack{x\to 0\\ y\to 0}$) Entonces $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

   Por lo tanto $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy} = 0 \cdot 1 = 0$.

4. Estudiar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

   Desarrollo. Usando el *Teorema del Sandwich*

   Es claro que:

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

   Como $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2) = 0$, Aplicando el *Teorema del Sandwich*, se tiene que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

5. Dada la función de dos variables:

$$z = f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

a) Considerar la familia de todas las rectas que pasan por el origen, $L_m : y = mx$. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \textit{con} \quad (x,y) \in L_m.$$

b) Con el resultado precedente, ¿qué se puede concluir con respecto al $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

c) Considerar el camino $C : y = x^2$. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \textit{con} \quad (x,y) \in C.$$

d) Con los resultados anteriores, ¿qué se puede concluir con respecto al $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Desarrollo.

a) Si $(x,y) \in L_m$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0.$$

b) Con el resultado precedente, se concluye que, *en caso que el* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *exista*, su valor debería ser 0.

c) Si $(x,y) \in C : y = x^2$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

d) Con el resultados anteriores, dado que hay *caminos distintos* por los cuales el *límite es distinto*, se concluye que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, no existe.

6. Determinar la continuidad de la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Desarrollo.

a) Por los caminos $C_1 : x = 0$ y $C_2 : y = 0$ (que pasan por el punto $(0,0)$), los límites de $f(x,y)$, son respectivamente, -1 y 1. Por lo tanto, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Luego, como no se cumple la segunda condición de continiudad, la función estudiada no es continua en $(0,0)$.

b) En un punto cualquiera $(a,b) \neq (0,0)$, se cumple que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Por lo tanto, f es continua en cada punto $(a,b) \neq (0,0)$.