

Temas: Incrementos. Diferenciales. Diferenciabilidad. Regla de la cadena.

1. ✓ Verificar que si una función (de una variable) $y = f(x)$ es derivable, entonces

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon\Delta x \quad (*)$$

donde $\epsilon = \epsilon(\Delta x) \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

¿Que nombre recibe f si satisface $(*)$?

2. ✓ Si $w = f(x, y)$ y $h = \Delta x$ y $k = \Delta y$ son incrementos de x e y respectivamente. ¿Cuál es el incremento (total) Δw de w ?. Dar un ejemplo.

3. ©

Definición: Sea $w = f(x, y)$ una función de dos variables. La función f es *diferenciable* en (x_0, y_0) si Δw puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \quad (1)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de Δx y Δy que tienen límite 0 cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Nota: Equivalentemente, $w = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) si:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta w - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \quad (2)$$

Teorema: Si $w = f(x, y)$ y f_x y f_y son continuas en una región rectangular R , entonces f es diferenciable en R .

Teorema: Si $w = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces f es continua en (x_0, y_0) .

4. ✓ Estudiar, en el origen, la continuidad y diferenciabilidad de las funciones:

a) $u = 3x^2 - y$

b) $w = \sqrt{|xy|}$ en $(0, 0)$.

$$c) u = f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y + 2x^3}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. © Regla de la cadena

Caso más simple:

Teorema: Si $w = f(x, y)$ y $x = g(t)$, $y = k(t)$, donde f , g y k son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Demostración (esbozo):

Como f es diferenciable, por (1) se tiene:

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \quad (3)$$

Dividiendo (3) por Δt , se tiene:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = f_x(x_0, y_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x_0, y_0)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4)$$

tomando límite cuando Δt tiende a 0, se tiene:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f_x(x_0, y_0)\frac{dx}{dt} + f_y(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}$$

■

El teorema precedente tiene múltiples extensiones. Una de ellas, por ejemplo, es

Teorema: Si $w = f(u, v)$ y $u = g(x, y)$, $v = k(x, y)$, donde f , g y k son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

6. ✓ Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable y $x = s^2 - t^2$, $y = t^2 - s^2$. Calcular y simplificar:

$$t \frac{\partial z}{\partial s} + s \frac{\partial z}{\partial t}$$

7. ✓ Si $z = f(x, y) \in C^2$, y $x = u^2 + w^2$, $y = 2uw$. Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\frac{\partial z}{\partial w} = 2uz_x + 2wz_y$

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} = 2z_x + 4u^2 z_{xx} + 8uw z_{xy} + 4w^2 z_{yy}$

8. ✓ Si $u = f(y/x)$, calcular y simplificar $xu_x + yu_y$.

9. a) © Una función $f(x, y)$ se dice *homogénea* de *grado* n si y solo si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y),$$

para todo $t > 0$.

b) ✓ Decidir si son homogéneas las funciones $u = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ y $g(x, y) = \sqrt{3x^2 - 2xy}$.

En caso de serlo, indicar en el grado.

c) ✓ Sea $u = f(x, y)$ una función diferenciable y homogénea de grado n . Verificar que

$$xf_1(x, y) + yf_2(x, y) = nf(x, y)$$

Sugerencia: Sea (x, y) un punto del dominio de u . Definir y derivar (con respecto a t) la función

$$g(t) = f(tx, ty) - t^n f(x, y)$$