

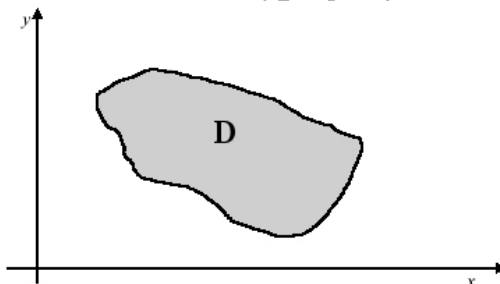
1. © *Recuerdo de la integral de Riemann.*

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Dividamos este intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Elijamos un punto x_i en cada uno de los n subintervalos. Se llama integral de Riemann o integral definida de $y = f(x)$ en $[a, b]$, al siguiente límite, cuando existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ el que se denota por $\int_a^b f(x) dx$ es decir:

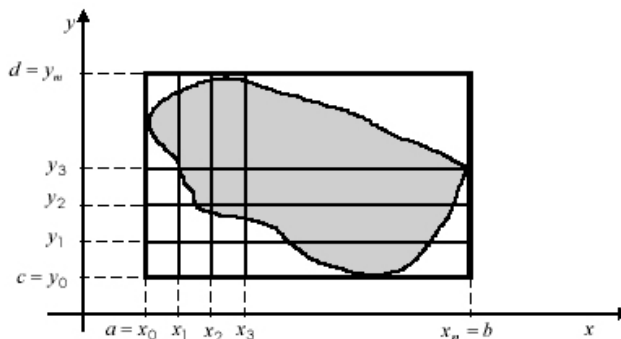
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

2. © *Integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en un dominio D .*

Esta definición es completamente análoga a la definición de la integral de Riemann de una función de una variable. Consideremos una función continua $z = f(x, y)$ definida en el siguiente dominio D :



- Sean $[a, b]$ y $[c, d]$ las proyecciones del dominio D sobre los ejes X e Y , respectivamente.
- Partición del dominio. Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y el intervalo $[c, d]$ en m subintervalos de igual longitud $\Delta y = \frac{d-c}{m}$. Trazando verticales (horizontales) por estos puntos de división se obtiene una partición del dominio en rectángulos de áreas $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

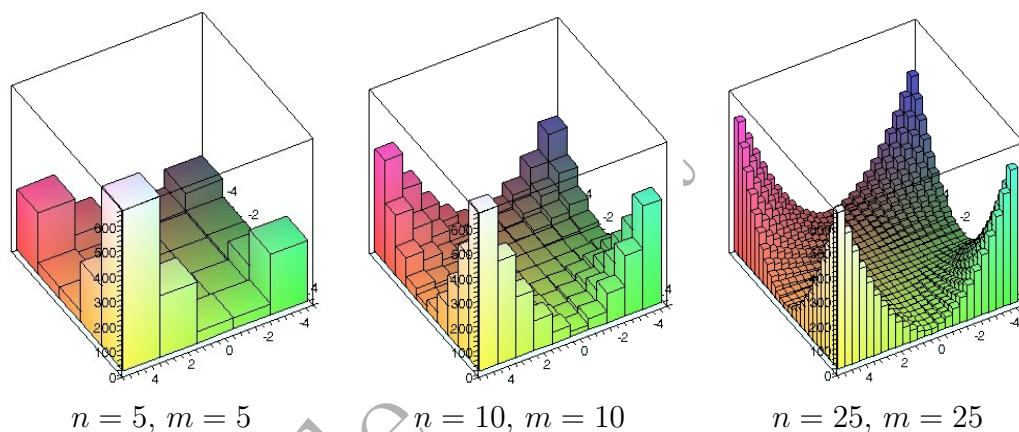


- c) En cada subrectángulo se elige un punto $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$.
 d) Se forma la suma de Riemann:

$$S(f, D, P) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$$

Nota: Si $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \notin D$, se define $f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = 0$.

Gráficos de algunas sumas de Riemann para la función $z = x^2 + y^2 + 20$ en $D = [-5, 5] \times [-5, 5]$



- e) **Definición.** La *integral doble* de f definida en una región D del plano, se define:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x \Delta y$$

siempre que este límite exista.

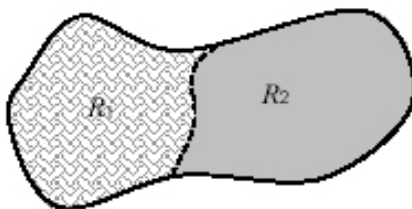
3. © Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g funciones de dos variables, continuas en un dominio cerrado D .

- a) $\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA \pm \iint_D g(x, y) dA$
 b) $\iint_D c f(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$, donde c es una constante.
 c) Si $f(x, y) \geq g(x, y)$, para todo $(x, y) \in D$, entonces: $\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$

d) Si $D = R_1 \cup R_2$ tal que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$



4. © Interpretación geométrica de la integral doble. Cuando $f(x, y) \geq 0$ en su dominio D , $\iint_D f(x, y) dA$ representa el volumen del sólido bajo el gráfico de $z = f(x, y)$ y sobre el plano XY .

5. © ¿Cómo se calcula, sin usar la definición, una integral doble?: **Teorema de Fubini.**

Sea $z = f(x, y)$ una función continua, definida en una región cerrada D del plano XY , entonces,

$$\iint_D f(x, y) dA = II(f, D)$$

es decir:

a) Si la región D se encuentra limitada por las curvas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$, con $g_1(x) \leq g_2(x)$, y por las rectas verticales $x = a$, $x = b$, siendo g_1 y g_2 funciones continuas en $[a, b]$, entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

b) Si la región D se encuentra limitada por las curvas $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$, con $h_1(y) \leq h_2(y)$, y por las rectas horizontales $y = c$, $y = d$, siendo h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

6. ✓ Cálculos de integrales dobles.

- a) Calcular $\iint_D (2y - 4x) dA$, siendo D la región acotada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$.
- b) Calcular $\iint_D e^x e^{3y} dA$ donde D es la región delimitada por el cuadrado $|x| + |y| = 1$.
- c) Hallar el volumen del sólido dado:
- 1) limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.
 - 2) limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

U de Talca