

1. Calcular: $\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y dx dy$

Respuesta.

$$\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y dx dy = \left[\int_0^1 x e^y \Big|_{x=1-y}^{x=1} \right] dy = \int_0^1 y e^y dy$$

[usando integración por partes, se obtiene:]

$$= (y e^y - e^y) \Big|_0^1 = 1$$

2. Dada la integral iterada $I = \int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} e^{12x-x^3} dx dy$.

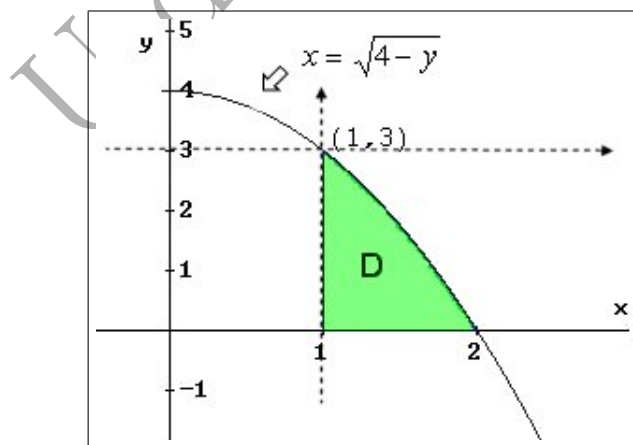
Expresar la integral, cambiando el orden de integración, y calcular su valor.

Respuesta.

- a) El dominio de integración está dado por:

$$D : \begin{cases} 1 \leq x \leq \sqrt{4-y} \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

- b) El dominio D , está limitado por las rectas $y = 0$, $y = 3$, $x = 1$ y la gráfica $x = \sqrt{4-y}$, representado gráficamente en la siguiente figura:



Dominio D

- c) El dominio D también se puede describir:

$$D : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

Por lo tanto: $I = \int_1^2 \int_0^{4-x^2} e^{12x-x^3} dy dx.$

d) Para calcular I usaremos su expresión anterior. Luego

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_0^{4-x^2} e^{12x-x^3} dy dx \\ &= \int_1^2 \left[ye^{(12x-x^3)} \Big|_{y=0}^{y=4-x^2} \right] dx \\ &= \int_1^2 \left((4-x^2)e^{12x-x^3} \right) dx = \frac{e^{12x-x^3}}{3} \Big|_1^2 = \frac{e^{11}}{3}(e^5 - 1) \approx 2942078,792 \end{aligned}$$

3. Sea $z = f(x, y) = \frac{y}{x}$ definida sobre el cuadrado unitario $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

a) Calcular un valor aproximado de $\iint_R f(x, y) dx dy$ mediante la suma de Riemann de f , considerando una partición de la región en 9 subcuadrados congruentes, y en cada subcuadrado se elige el vértice inferior izquierdo.

b) El valor de $\iint_R f(x, y) dx dy$, usando integrales iteradas.

Respuesta.

a) 1) Se tiene que: $\Delta x = \frac{1}{3} = \Delta y$

En $[1, 2]$ se considera la partición: $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$, determinando los siguientes subintervalos:

$$\left[1, \frac{4}{3}\right], \quad \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right], \quad \left[\frac{5}{3}, 2\right]$$

En $[0, 1]$ se considera la partición: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$, determinando los siguientes subintervalos:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

2) Cada subcuadrado tiene un área igual a $\Delta A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

- 3) De la partición anterior se obtienen 9 subcuadrados. Eligiendo en cada subcuadrado el vértice inferior izquierdo, se obtiene:

	$[0, \frac{1}{3}]$	$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$	$[\frac{2}{3}, 1]$
$[1, \frac{4}{3}]$	$(1, 0)$	$(1, \frac{1}{3})$	$(1, \frac{2}{3})$
$[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]$	$(\frac{4}{3}, 0)$	$(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$
$[\frac{5}{3}, 2]$	$(\frac{5}{3}, 0)$	$(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$

- 4) La suma de Riemann de f asociada a la partición es:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3,3} &= [f(1, 0) + f(1, \frac{1}{3}) + f(1, \frac{2}{3}) + f(\frac{4}{3}, 0) + f(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) + f(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) + f(\frac{5}{3}, 0) + \\ &\quad + f(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) + f(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})] \Delta x \\ &= \frac{47}{180} \approx 0,2611111111 \end{aligned}$$

$$b) \int_R \int f(x, y) dx dy = \int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{x} dy dx = \int_1^2 \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,3465735902$$

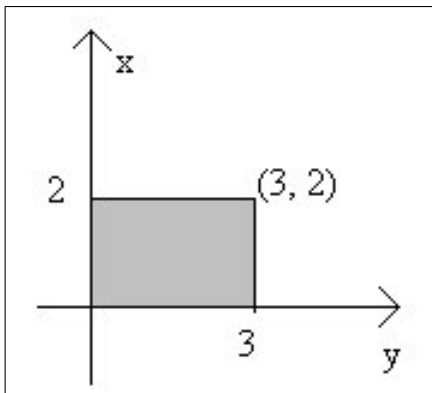
4. Encontrar el volumen de la región sólida del espacio, bajo el plano $z = f(x, y) = 6 - x - y$
- Sobre el dominio rectangular R : $[0, 3], [0, 2]$.
 - Sobre el dominio D limitado por:
las rectas $x = 0$, $y = 2x$, y la parábola $y = -x^2 + 3$.

Respuesta.

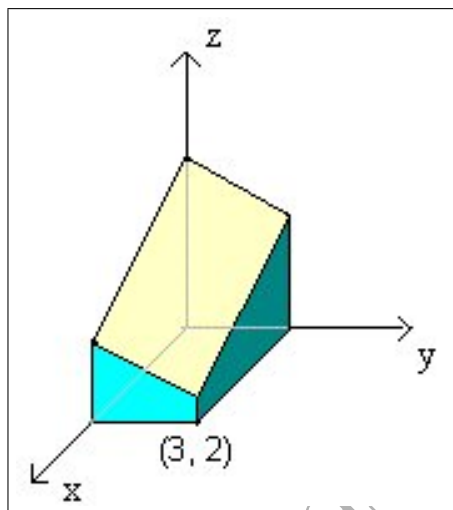
- a) 1) La región de integración:

$$R: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

es un rectángulo representado gráficamente en la figura:



- 2) La región sólida S del espacio bajo el plano $z = 6 - x - y$ y sobre el rectángulo R , se encuentra representada en la figura:

Sólido S

- 3) Describiendo la región a través de secciones verticales, el volumen V del sólido S se expresa mediante la siguiente integral iterada:

$$V = \int_0^3 \int_0^2 (6 - x - y) dy dx$$

Así:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^2 (6 - x - y) dy dx = \int_0^3 \left(6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 dx \\ &= \int_0^3 (10 - 2x) dx = 10x - x^2 \Big|_0^3 = 21 \end{aligned}$$

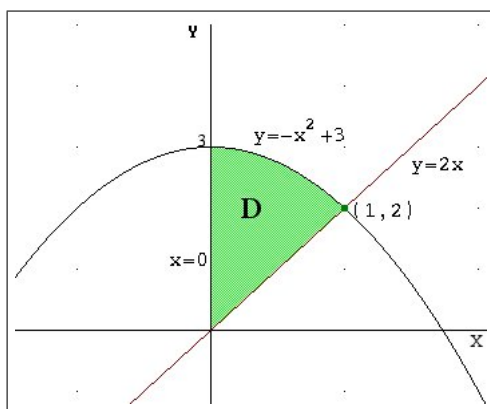
Luego, el volumen del sólido es 21.

Nota. Describiendo la región a través de secciones horizontales, se obtiene:

$$V = \int_0^2 \int_0^3 (6 - x - y) dx dy = 21$$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = -x^2 + 3 \end{array} \right| \Rightarrow x = 1, \quad y = 2$$

La región de integración D se encuentra achurada en la figura:



$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq y \leq -x^2 + 3 \end{cases}$$

Luego, el volumen V del sólido es:

$$V = \int_0^1 \int_{2x}^{-x^2+3} (6 - x - y) dy dx = \int_0^1 \left(6y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{2x}^{-x^2+3} dx \approx 6,483$$

Luego, el volumen del sólido es 6,483.

- 5) Determinar el volumen V del sólido que queda debajo del plano $x + z = 2$, sobre el plano $z = 0$ y al interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Respuesta.

La proyección del cilindro sobre el plano XY es el círculo $x^2 + y^2 = 4$, que corresponde al dominio de integración.

Luego:

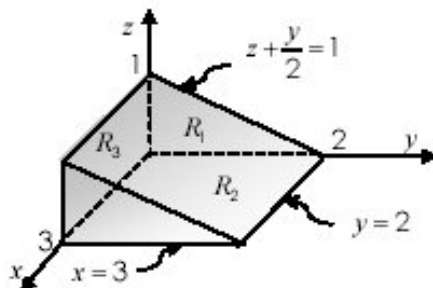
$$D: \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

Como el sólido presenta una simetría con respecto al plano XZ , se puede calcular, $\frac{1}{2}V$. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2-x) dy dx = \int_{-2}^2 \left((2-x)y \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 (2-x)\sqrt{4-x^2} dx \\ &= \left[x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + 4 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \Big|_{x=-2}^{x=2} = 4\pi \end{aligned}$$

Luego, $\frac{1}{2}V = 4\pi$, por lo tanto, $V = 8\pi$ (unidades de volumen).

6. Escribir la integral $I = \int \int \int_R f(x, y, z) dV$ por medio de tres integrales simples iteradas en coordenadas cartesianas, de todas las formas posibles, siendo R el prisma triangular recto:

Región R

Respuesta.

La intersección del prisma con los planos coordenados, se muestra en la figura y las diferentes posibilidades de resolución se muestran a continuación:

$$I = \int \int_{R_1} \left(\int_0^3 f(x, y, z) dx \right) dy dz = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^{2-2z} \int_0^3 f(x, y, z) dx dy dz \\ \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} \int_0^3 f(x, y, z) dx dz dy \end{cases}$$

$$I = \int \int_{R_2} \left(\int_0^{\frac{2-y}{2}} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \begin{cases} \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{\frac{2-y}{2}} f(x, y, z) dz dy dx \\ \int_0^2 \int_0^3 \int_0^{\frac{2-y}{2}} f(x, y, z) dz dx dy \end{cases}$$

$$I = \int \int_{R_3} \left(\int_0^{2-2z} f(x, y, z) dy \right) dx dz = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{2-2z} f(x, y, z) dy dx dz \\ \int_0^3 \int_0^1 \int_0^{2-2z} f(x, y, z) dx dz dy \end{cases}$$